$\max z = 5x_2 + 4x_3 + 3x_6$

Sous $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 5$

$4x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 = 11$

$3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_6 = 8$ $\quad x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots 6$

SBA initiale : $B = \{x_1, x_4, x_5\}$.

- La solution $x_1 = 5$, $x_4 = 8$, $x_5 = 11$ $\quad x_2 = x_3 = x_6 = 0$ est admissible.

$z = 5x_2 + 4x_3 + 3x_6 = 0$.

	c_j	0	5	4	0	0	3			
Coûts	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	b_i/a_{ie}	
0	x_1	1	2	3	0	0	1	5	5/2	2,5
0	x_5	0	4	1	0	1	2	11	11/4	2,75
0	x_4	0	3	4	1	0	2	8	8/3	2,6
	z_j	0	0	0	0	0	0			
	Δz	0	5	4	0	0	3			

x_2 variable entrante
x_1 variable sortante.

	c_j	0	5	4	0	0	3		
Coûts	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	
5	x_2	0,5	1	1,5	0	0	0,5	2,5	2,5/0,5 5
0	x_5	-2	0	-5	0	1	0	1	1/0
0	x_4	-1,5	0	-0,5	1	0	0,5	0,5	1
	z_j	2,5	5	7,5	6	0	2,5		
	Δz	-2,5	0	-3,5	0	0	0,5		

x_6 rentre - x_4 sort.

	c_j	0	5	4	0	0	3	
Coûts	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
5	x_2	2	1	2	-1	0	0	2
0	x_5	-2	0	-5	0	1	0	1
3	x_6	-3	0	-1	2	0	1	1
	z_j	1	5	7	1	0	3	
	Δz	-1	0	-3	-1	0	0	

$x_2 = 2 \quad x_5 = 1 \quad x_6 = 1 \quad \boxed{z = 13}$

Prénom NOM

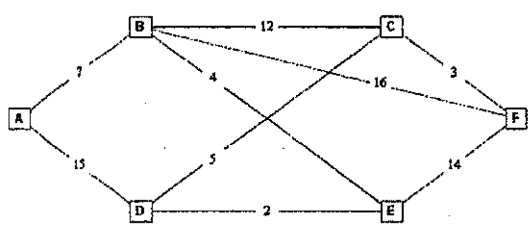
↗	A	B	C	D	E	F	G
A		4	8	0			
B				0	2	2	
C					3		5
D						0	
E						5	0
F							7
G							

3. En partant du flot complet considéré dans la question 2, et par l'algorithme de votre choix, en justifiant vos réponses, trouver le flot maximal dans ce graphe.

Chemin $A \xrightarrow[8]{} D \xrightarrow[6]{} F \dashrightarrow_{5} E \xrightarrow[3]{} G$ ⇒ capa min = 5 Valeur du flot max = 17
⇒ pas d'autre chemin.

EXERCICE 3

Une agence de voyage organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.
Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



1. Justifier que ce graphe est connexe
2. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.
En utilisant un algorithme et en expliquant soigneusement la démarche, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
3. On suppose maintenant que les routes de A vers B, de B vers C, de B vers E, de B vers F, de E vers D et de D vers A sont à sens unique. On cherche à énumérer tous les circuits permettant aux touristes de visiter tous les sites une fois et une seule, en revenant à leur point de départ. De quelle recherche s'agit-il ? En justifiant votre réponse, énumérer tous les solutions.
4. Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois. Quelle propriété mathématique a un tel parcours ?

- Durée prévue : 2h

Document autorisé : une feuille A4 recto verso - pas de calculatrice

PROGRAMMATION LINEAIRE ET GRAPHES

EXERCICE 1

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\max z = 5x_2 + 4x_3 + 3x_6$$

Sous les contraintes :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 5$$
$$4x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 = 11$$
$$3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_6 = 8$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, 6$$

On remarquera que $B = \{x_1, x_4, x_5\}$ est une solution de base admissible (on le justifiera, et on donnera la valeur du critère pour cette solution).

EXERCICE 2

On décrit un graphe avec la capacité de ses arcs à l'aide de la matrice suivante. Une case vide indique que l'arc entre les deux sommets n'existe pas.

↗	A	B	C	D	E	F	G
A		6	8	8			
B				2	2	3	
C					3		6
D						6	
E						6	9
F							7
G							

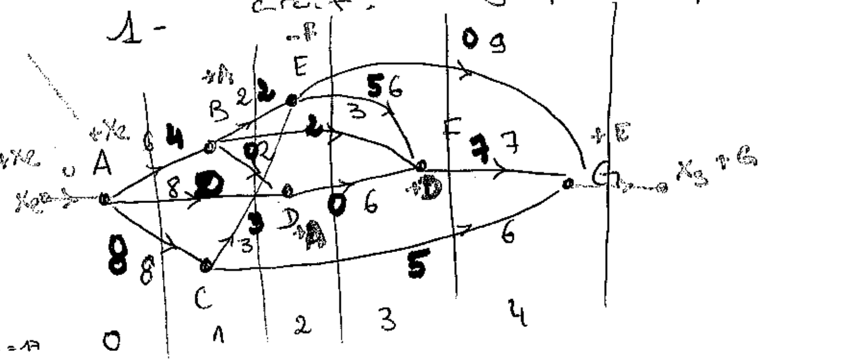
1. Proposer une structuration de ce graphe en justifiant votre choix.
2. On part d'un flot complet. Le graphe d'écart associé G_e est *partiellement* donné dans la matrice ci-contre :

↗	A	B	C	D	E	F	G
A		2	0	8			
B	1			2	0	1	
C	8						1
D	0					6	
E		2	3			2	9
F		2			5		0
G			5			7	

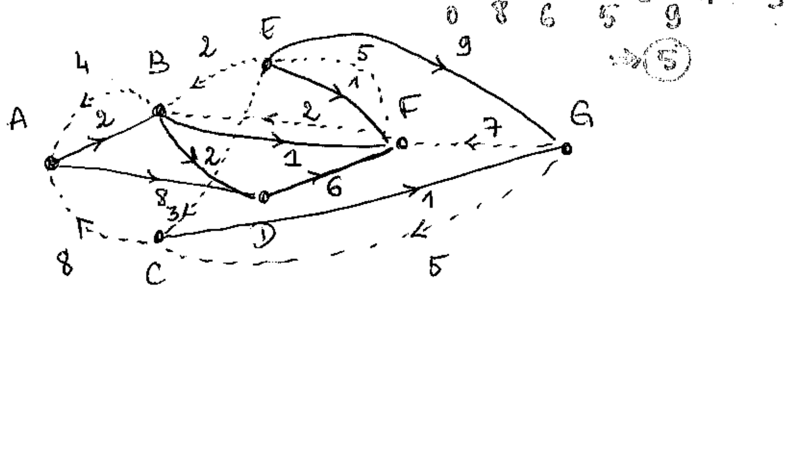
Compléter ce graphe d'écart dans la matrice, et donner le flot complet dont on est parti pour l'obtenir dans la matrice ci-après.

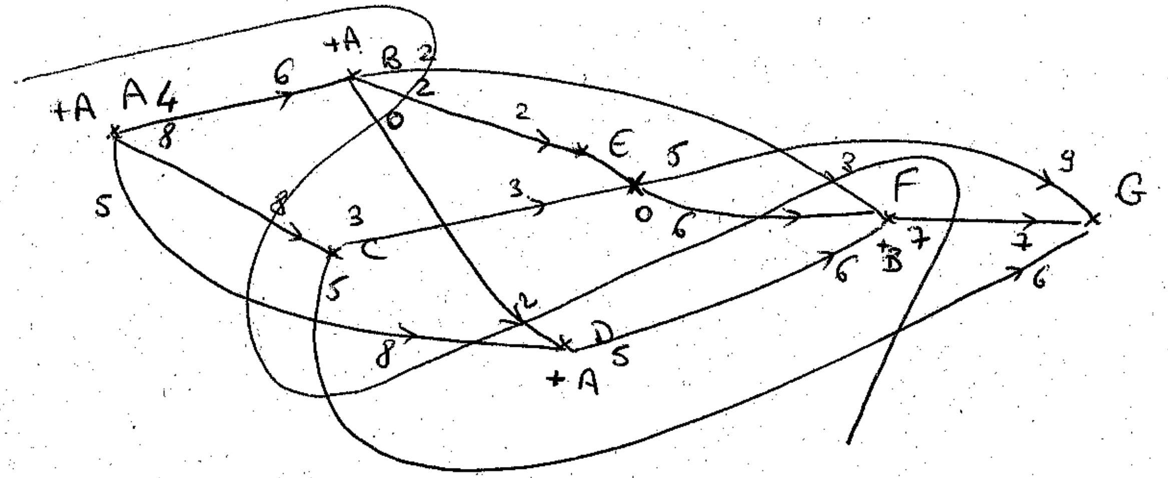
Structuration en graphe car pas de circuit.

1-



X_e A B F E G X_s
0 2 ou X_e A D F E G X_s
0 8 6 5 9
(5)





flot max = 17 vérifie coupe ok.

Ex3

① Connexe. = ∀ couple sommets il existe une chaîne joignant x_i et x_j.

ok

② Dijkstra

marquage précéd dist.

	A	B	C	D	E	F
1	A 0	0 ϕ ∞	0 ϕ ∞	0 ϕ ∞	0 ϕ ∞	0 ϕ ∞
		1 A 7		0 A 15		
			0 B 19	0 A 15	1 B 11	0 B 23
			0 B 13	1 E 13		0 B 23
			1 D 18			

21

③ chemin hamiltonien.