

Exercice 1:

$$1) \quad G_c(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} \rightarrow G(z) = \mathcal{Z}^{-1} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s^2+1)} \right] = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \right]$$

$$= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z^2+1} \right] = \frac{T}{z-1} - \frac{z-1}{z^2+1} = \frac{(T-1)z^2 + 2z + (T-1)}{(z-1)(z^2+1)}$$

$$G(z) = \frac{(\frac{\pi}{2}-1)z^2 + 2z + (\frac{\pi}{2}-1)}{(z-1)(z^2+1)}$$

2) $z_1 = 1 \quad z_2 = j \quad z_3 = -j$ stabilité simple oscillatoire

3) $\pi \geq 2$

$$G(z) = \frac{2z}{(z-1)(z^2+1)}$$

4) $\deg A = 3 \rightarrow \deg P = 2\deg A - 1 = 5 \Rightarrow P = z^5$

$$\deg R = \deg P - \deg A = 2$$

$$\deg S = \deg A - 1 = 2$$

La perturbation en sortie est rejetée car $A(z)$ possède l'intégration

$$R = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 \quad S = s_0 + s_1 z + s_2 z^2$$

$$AR + BS = P$$

$$(z-1)(z^2+1)(r_0 + r_1 z + r_2 z^2) + 2z(s_0 + s_1 z + s_2 z^2) = z^5$$

$$(z^3 - z^2 + z - 1)(r_0 + r_1 z + r_2 z^2) + 2s_0 z + 2s_1 z^2 + 2s_2 z^3 = z^5$$

$$r_2 z^5 + (r_1 - r_2)z^4 + (r_0 - r_1 + r_2 + 2s_2)z^3 + (-r_0 + r_1 - r_2 + 2s_1)z^2 + (r_0 - r_1 + 2s_0)z - r_0 = 0$$

$$r_2 = 1 \quad r_1 = 1 \quad r_0 = 0 \quad \begin{array}{ll} 2s_0 = 1 & s_0 = \frac{1}{2} \\ 2s_1 = 0 & s_1 = 0 \\ 2s_2 = 0 & s_2 = 0 \end{array}$$

$$R(z) = z^2 + z = z(z+1)$$

$$S(z) = \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{BT}{P} = \frac{2z^{-1}T(z)}{z^5} = \frac{2T(z)}{z^4} = \quad H(1) = 1 \Rightarrow 2T(1) = 1$$

$$T(1) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T(z) = \frac{1}{2}}$$

Exercice 2 :

1) le polynôme caractéristique est donné par

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0 = (z-1)(z^2+1) = 0$$

stabilité simple oscillatoire

2) $G(z) = \frac{2z}{(z-1)(z^2+1)} \Rightarrow$ Syst. Commandable et observable

3) $K = [k_0 \ k_1 \ k_2]$

3.1) $A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-k_0 & -1-k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow K = [1 \ -1 \ 1]$

3.2) $H(z) = \frac{2l_c z}{z^5} = \frac{2l_c}{z^4} \Rightarrow l_c = \frac{1}{2}$

3.3) Pour déduire la relation entre u_k et y_k

$$y_k = Cx_k$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_{k+1} = Cx_{k+1}$$

$$x_{k+2} = A^2x_k + ABu_k + Bu_{k+1}$$

$$y_{k+2} = Cx_{k+2} \quad \text{d'où}$$

$$y_k = Cx_k$$

$$y_{k+1} = CAx_k + CBu_k$$

$$y_{k+2} = CA^2x_k + CABu_k + CBu_{k+1}$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}}_{O^*} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ CB \\ CAB \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \end{bmatrix} u_{k+1}$$

O est inversible car le système est observable d'où

$$x_k = O^{-1} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix} - O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ CB \\ CAB \end{bmatrix} u_k + O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \end{bmatrix} u_{k+1}$$

$$u_k + K O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ CB \\ CAB \end{bmatrix} u_k + K O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \end{bmatrix} u_{k+1} = O^{-1} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$\left(1 + K O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ CB \\ CAB \end{bmatrix} \right) u_k + K O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \end{bmatrix} u_{k+1} = O^{-1} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}$$

Non réalisable car non propre.

3.4) Comme le Z est observable, on peut utiliser un retour d'état observateur

