

Correction Examen Systèmes Multivariables

08/12/2022

Exercice N°1

1) On a :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ & & -1 & \\ & & & -2 \end{bmatrix} x + \underbrace{\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & x \end{bmatrix}}_{UBH} y_c$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}}_{CV} x$$

$$V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$$

$$C \cdot v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad C v_2 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \quad C v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = x \\ y = 0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = x \end{matrix}$$

d'autre $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \\ c \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ e \\ f \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ i \\ j \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ l \\ m \end{bmatrix}$

2.) $s = -1, v_1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$s = -2, v_2$

$$\begin{bmatrix} -1/4 & \\ 0 & \\ 1/2 & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{21} \\ w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow w_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$s = -1, v_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & \\ -1/2 & \\ 0 & \\ 1/2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{31} \\ w_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ i \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$s = -2, v_4$

$$\begin{bmatrix} 0 & \\ -1/6 & \\ 0 & \\ 1/3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{41} \\ w_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ l \\ m \end{bmatrix} \Rightarrow w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

d'autre $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow U = V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

$K = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = K$

$UBH = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} H \Rightarrow H \leq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 2.

$$M(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 6s+12 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = s^2 + s = s(s+1) \text{ d'où}$$

$$\gamma_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \text{ et } \gamma_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

$$\text{La forme de Smith de } M(s) \text{ est } S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s(s+1) \end{bmatrix}$$

La forme de Smith-McMillan est alors obtenue par

$$G(s) = V(s) \frac{S(s)}{s(s+1)^2} W(s)$$

$$\frac{S(s)}{s(s+1)^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

L'ordre du système est 4
 0 est pôle simple
 -1 est pôle triple
 Il n'y a pas de zéro fini

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s+4 \end{bmatrix}}{s^3 + 2s^2 + s} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}}{s+1}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad d^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + [0 \ -1] u \\ y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$