3. MODULATION/DEMODULATION DE FREQUENCE

Intéressons-nous au principe de modulation et démodulation FM, et aux circuits associés qui sont respectivement le VCO (Voltage Control Oscillator ou en français Oscillateur Contrôle en Tension) et la PLL (Phase Locked Loop, ou en français Boucle à Verrouillage de Phase).

3.1 ~ Définition

La modulation de fréquence (Frequency Modulation FM) consiste à modifier la fréquence d'une porteuse de manière linéaire en fonction d'un signal modulant. Soit un signal modulant $U_M(t) = A_M \cos(\omega_M t)$ et une porteuse $U_P(t) = A_P \cos(\omega_P t + \varphi) = A_P \cos\theta$.

Si la fréquence de la porteuse varie en fonction du signal modulant, l'angle θ varie. La fréquence instantanée du signal est alors égale à la dérivée de θ:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{dt}$$

Comme la fréquence instantanée varie de manière linéaire avec le signal modulant, on peut écrire :

$$f(t) = f \quad + \Delta f \cos(\omega_M t)$$

où Δf représente l'excursion en fréquence. L'angle θ peut se calculer en intégrant la relation précédente :

$$\theta = 2\pi f_P t + \frac{\Delta f}{f_M}\sin(\omega_M t) + \varphi$$

L'expression du signal modulé s'écrit alors avec m indice de modulation:

$$U_{FM}(t) = A_p \cos\left[\omega_p t + \frac{\Delta f}{f_M}\sin(\omega_M t) + \phi\right]$$

$$U_{FM}(t) = A_p \cos\left[\omega_p t + \phi + m\sin(\omega_M t)\right]$$

Cette expression se généralise quel que soit le signal modulant m(t) selon :

$$U_{FM}(t) = A_p \cos\left[\omega_p t + \phi + k_f\int_0^t m(u).du\right]$$

avec :

- k_f constante en rad.s.V^{-1}
- $f_i(t)$ fréquence instantanée définie par :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt} \text{ soit } f_i(t) = f_p + \frac{k_f}{2\pi}m(t)$$

La modification de spectre induite par la fonction « modulation de fréquence » est complexe à calculer, contrairement à la translation de spectre lors d'une modulation en amplitude. Dans le cas d'un signal informatif purement sinusoïdal $m(t) = A\cos(2\pi f_M\ t + \Psi_M)$, on peut établir l'expression :

$$u_{FM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_p t + \frac{Ak_f}{2\pi f_M}\sin(2\pi f_M t + \Psi_M) + \Psi_0 - \frac{Ak_f}{2\pi f_M}\sin(\Psi_M)\right]$$

avec f_i fréquence instantanée définie par :

$$f_i(t) = f_0 + \Delta f \cos\left(2\pi f_M t + \Psi_M\right) \text{ où } \Delta f = \frac{Ak_f}{2\pi}$$

La transformée de Fourier de $u_{FM}(t)$ donne :

$$|U_{FM}(f)| = \frac{A_0}{2}(A+B)$$

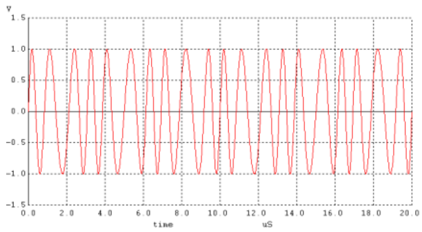
$$A = |J_0(m_F)|\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

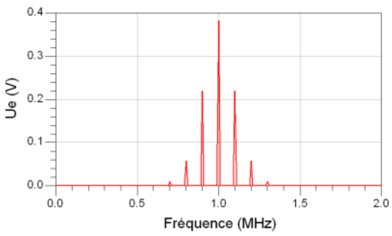
$$B = \sum_{n\in Z^*}|J_n(m_F)| \left[\delta(f-f_0-nf_M)+\delta(f-f_0+nf_M)+\delta(f+f_0-nf_M)+\delta(f+f_0+nf_M)\right] \text{avec}$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!} \text{ fonction de Bessel d'ordre n.}$$

On démontre ainsi que le spectre d'une modulation de fréquence dans le cas d'un signal informatif sinusoïdal est infini.

L'exemple ci-dessous présente le résultat d'un signal sinusoïdal de 100kHz modulé en fréquence par une porteuse à 1MHz, avec son spectre composé d'une raie à la fréquence de la porteuse et d'une infinité de raies situées à kf_M, $k \in \mathbb{Z}^*$, de part et d'autre de la fréquence de la porteuse.





En remarquant que le spectre décroît lorsque f s'éloigne de f_P, on définit m_F l'indice de modulation et on applique la règle empirique de Carson pour évaluer la largeur de bande B_{FM}, occupée en modulation FM :

> $$B_{FM} \approx 2f_M(m_F+1)$$
>
> avec $m_F = \dfrac{\Delta f}{f_M}, \Delta f = \dfrac{Ak_f}{2\pi}$
>
> et f_M fréquence maximale du signal modulant

Selon la valeur de l'indice de modulation on distinguera :

- ✓ m_F<<1 : on parlera de **modulation en bande étroite** $B \approx 2f_M$ (comparable à une modulation d'amplitude)

- ✓ m_F>>1 : on parlera de **modulation en bande large** $B \approx 2\Delta f$

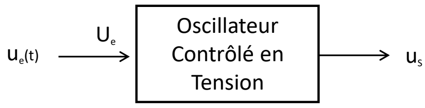
<u>Remarque :</u> En télécommunications, l'occupation spectrale est un critère important car la bande de fréquence allouée à un canal de transmission est en général réduite au strict minimum afin de la partager avec un maximum d'utilisateurs.

3.2 ~ Modulateur de fréquence

Un modulateur de fréquence est un système électronique qui doit voir varier sa fréquence en fonction du temps : c'est donc un oscillateur, dont la forme d'onde peut être sinusoïdale mais plus fréquemment carrée. L'électronicien ne connaissant que les variables tension et courant, cet oscillateur va voir sa fréquence pilotée par un signal en tension qui évolue dans le temps : on définit ainsi un Oscillateur Contrôlé en Tension (en anglais VCO pour Voltage Control Oscillator).

Dès lors, la relation entre f, fréquence de l'oscillate,ur et U_e , amplitude maximale du signal d'entrée $u_e(t)$, est linéaire et caractérisée par un coefficient constant K_0 appelé sensibilité ou gain de l'oscillateur selon l'expression :

$$f = K_0(U_e - U_0) + f_0$$



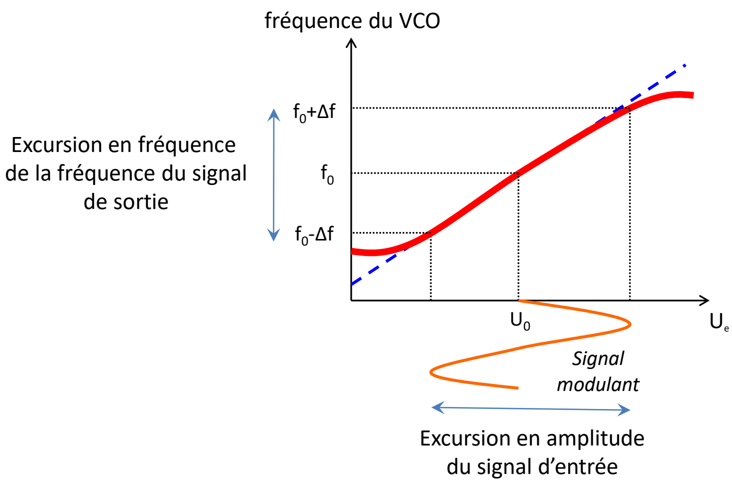
Avec :

U_0 tension de référence du VCO, $[U_0]$=V,

f_0 fréquence centrale de l'oscillateur, $[f_0]$= s^{-1}

K_0 gain de l'oscillateur, où $[K_0]$=$V^{-1}s^{-1}$.

Plus le gain K_0 sera important, plus l'excursion en fréquence et l'indice de modulation sont importants.



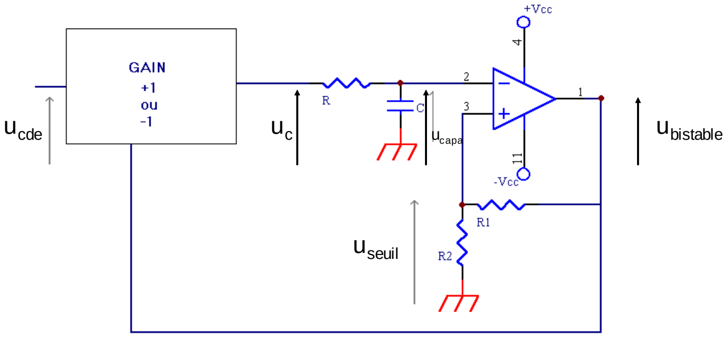
Remarque : Une fois le signal modulé en fréquence, celui-ci peut encore être transposé en fréquence une ou plusieurs fois vers la bande de fréquence qui est allouée au canal de transmission.

3.4 ~ Réalisation d'un VCO

Bien qu'il existe des composants «sur puce» assurant la fonction d'Oscillateur Contrôlé en Tension, composants souvent associés à la fonction PLL, (par exemple le 4046 de chez Philips, les séries MC155156-2 de Motorola, 560, 561,564 de National Semiconductor,...), il est possible de concevoir un OCT à partir de briques analogiques élémentaires, dont un exemple est présenté ci-après.

Présentons l'exemple de réalisation d'un OCT dont la tension de commande peut varier de 0 à 5 volts avec une fréquence centrale de 200kHz. Comme la tension de commande est unipolaire (non symétrique par rapport à la masse), la fréquence centrale doit être obtenue pour une tension de commande située au milieu de sa plage soit 2.5V.

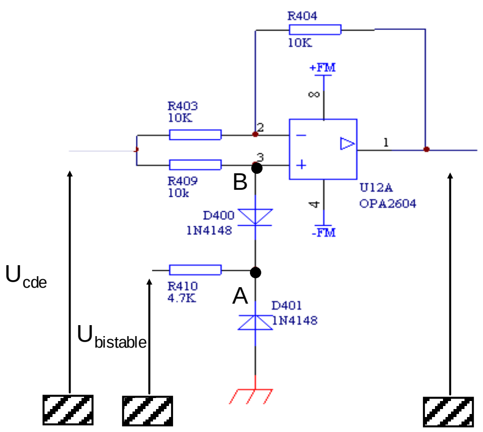
Analysons l'architecture du montage ci-après qui détaille sous la forme d'un schéma bloc l'architecture d'un VCO, où l'oscillateur est un oscillateur de relaxation.



Le **multivibrateur** délivrant des signaux de forme d'onde carrée est constitué par deux sous-systèmes :

- ✓ un montage **astable** réalisé sur la base d'un circuit RC associé à un bistable inverseur,
- ✓ un montage amplificateur à **gain +/- 1** qui inséré entre la sortie de l'astable et l'entrée du réseau RC va commander la charge et décharge du condensateur et par la même contrôler la fréquence des oscillations.

Considérons le circuit électronique ci-après, où les résistances R doivent être de l'ordre de quelques kΩ afin de garantir des courants de l'ordre de quelques mA tout en restant compatible avec l'hypothèse A.O idéal.



Le comportement de ce système est réglé par la conduction ou le blocage de diodes D_1, D_2 contrôlées par le signal de sortie du bistable dont le potentiel électrostatique $u_{bistable}$ ne peut prendre que deux valeurs $\pm U_{SAT}$ tensions de saturation de l'A.O.

L'entrée u_{cde} issue d'un système logique est strictement positive. On analyse le fonctionnement du montage en fonction de la tension de commande des diodes $u_{bistable}$:

- ✓ $u_{bistable} = +U_{SAT}$, implique $V_A>0$ d'où le blocage de la diode D_1. La diode D_2 conduirait si $V_B>V_A+0{,}6V$ ce qui est impossible vu que la tension maximale de commande u_{cde} ne peut excéder U_{sat} sous peine de détériorer l'A.O. La diode D_2 est donc bloquée, le circuit est « ouvert » entre B et A. Les entrées différentielles de l'A.O en fonctionnement linéaire avec $u_+=u_-$ et sont décrites par les expressions :

$$u_+ = u_{cde}$$

$$u_- = \frac{1}{2}(u_{cde} + u_c)$$

D'où :

$$u_c = u_{cde}$$

On en conclue que lorsque **$u_{bistable}$ = +U_{SAT}**, le montage se comporte comme un montage **suiveur de tension** avec un **gain** stationnaire égal à **+1.**

- ✓ $u_{bistable}$ = -U_{SAT} : la diode D_1 est passante et la différence de potentiel à ses bornes est égale à –0,6V, ce qui implique la mise en conduction de la diode D_2. En négligeant la résistance dynamique des diodes on peut considérer comme nul le potentiel u_+. Le circuit de contre réaction restant inchangé, on conserve l 'équation précédente du potentiel de l'entrée inverseuse, soit l'expression:

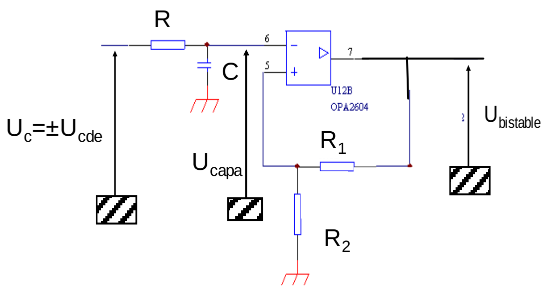
$$u_- = \frac{1}{2}(u_{cde} + u_c) = u_+ = 0$$

D'où :

$$u_c = -u_{cde}$$

On en conclue que lorsque **$u_{bistable}$ = -U_{SAT}**, le montage se comporte comme un montage **inverseur de tension** avec un **gain** stationnaire égal à **-1.**

On vient de démontrer que la sortie du bistable commande le signe de la tension de commande $u_c = \pm u_{cde}$ qui est appliquée en entrée du réseau RC.



Selon la tension en entrée du réseau RC, le condensateur voit sa capacité se charger (ou se décharger) jusqu'au seuil de basculement positif $u_{seuil} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{SAT}$ (ou négatif -u_{seuil}) du bistable

On connaît l'expression de la charge $u_{capa}(t)$ du condensateur :

$$u_{capa}(t) = u_{finale} - \left[u_{finale} - u_{initiale}\right]\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

avec $u_{capa}(t)$ fonction causale définie pour t>0 avec pour origine des temps l'instant d'application au réseau du potentiel ; $u_{initiale}$ et u_{finale} respectivement potentiel imposé en entrée du réseau RC, et charge initiale du condensateur.

La charge étant commandée par le potentiel $u_c = +u_{cde}$ contrôlé par la sortie du bistable inverseur, on peut supposer que le condensateur se charge depuis le potentiel de basculement négatif du bistable jusqu'au potentiel associé au seuil de basculement positif, soit

$$u_{c1}(t_1) = u_{seuil} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{SAT}\,.$$

Dès lors l'expression de t_1 se déduit de l'égalité:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{SAT} = u_c - \left[u_c - \left(-\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{SAT} \right) \right] \exp(-\frac{t_1}{RC})$$

soit :

$$t_1 = RC \ln\left[\frac{u_c + u_{seuil}}{u_c - u_{seuil}} \right] = RC \ln\left[1 + \frac{2u_{seuil}}{u_c - u_{seuil}} \right]$$

avec $u_c = +u_{cde}$

On effectuera le raisonnement symétrique pour la décharge du condensateur qui s'effectuera avec le potentiel $u_c = -u_{cde}$ comme consigne

Ainsi, en supposant le phénomène périodique avec des seuils du bistable symétriques, la période T des oscillations devient :

$$T = 2t_1 = 2RC \ln\left[1 + \frac{2u_{seuil}}{u_c - u_{seuil}} \right]$$

Avec

$u_c = +u_{cde}$

La condition mathématique $u_c > u_{seuil}$ est physiquement vraie sinon la capacité ne pourrait se charger entraînant un blocage de l'oscillateur.

Cette expression peut être linéarisée à partir du développement limité de la fonction ln(1+x) sous réserve que u_{seuil} soit très inférieur à u_c, on peut écrire :

$$T \approx 4RC \frac{u_{seuil}}{u_{cde} - u_{seuil}}$$

avec

$$u_{seuil} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{SAT} << u_{cde}$$

On en déduit l'expression de la fréquence des oscillations de relaxation :

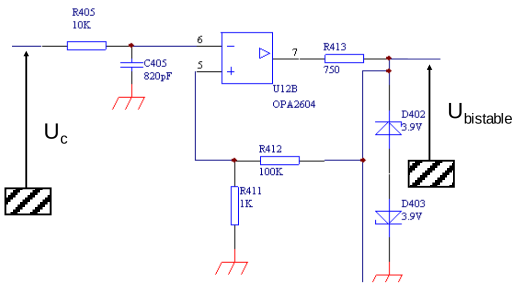
$$f = \frac{u_{cde} - u_{seuil}}{4RCu_{seuil}} = K_0 u_{cde} - f_0$$

avec $u_{cde} >> u_{seuil}$ et $u_{SAT} > u_{cde} >> u_{seuil}$, et K_0 gain du VCO défini par :

$$K_0 = \frac{1}{4RCu_{seuil}}$$

3.5 ~ Amélioration d'un VCO : effet de la non symétrie des seuils de saturation de l'A.O

On sait que les niveaux de tension de saturation de l'A.O ne sont pas symétriques. Cette imperfection a pour effet immédiat de rompre la symétrie sur les seuils de basculement du bistable. Au delà d'induire un rapport cyclique du signal de l'oscillateur différent de 50%, le gros défaut du signal résiderait dans le fait que sa valeur moyenne ne serait plus nulle sur une période. Ce défaut s'avèrerait bloquant dans la démodulation lors de l'application du VCO en PLL. On corrige ce défaut en limitant l'excursion de la tension de sortie par l'emploi de deux diodes zéner montées tête bêches. On limite le courant dans les diodes zéner par le choix de la résistance R calculée en fonction de la puissance Max pouvant être dissipée dans la diode. A ce titre, suivant le boîtier BZX84 ou BZX55, on peut dissiper des puissances maximales de l'ordre de 350mW à 500mW. L'A.O étant limité à 25mA, on en déduit une résistance R de l'ordre de 750Ω.



Les seuils du bistable sont à présent symétriques mais la valeur de la tension de saturation de l'A.O n'est plus $\pm U_{SAT}$ mais $\pm(V_Z+0.6V)$ ce qui a pour conséquence la modification :

- ✓ des seuils du bistable qui sont définis par :

$$u_{seuil} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(V_z + 0,6)$$

- ✓ de la fréquence du VCO fonction des tensions de seuil

$$f = \frac{u_{cde} - u_{seuil}}{4RCu_{seuil}} = K_0 u_{cde} - f_0$$

Avec

$$u_{cde} >> u_{seuil}$$

- ✓ de la plage de valeurs de la tension de commande $[V_Z + 0.6] > u_{cde} >> u_{seuil}$ afin de garantir le fonctionnement commutateur à diodes du convertisseur de gain ±1.

Le cahier des charges imposait :

- une tension de commande variable entre 0 à 5 volts, pour une tension de sortie du VCO type signal carré d'amplitude ±5 volts.
  - ⇨ on utilise deux diodes zéner type BZX84 de tension zéner égale à 3,9 Volts, ce qui fixe à ±4,5 volts la sortie du VCO.

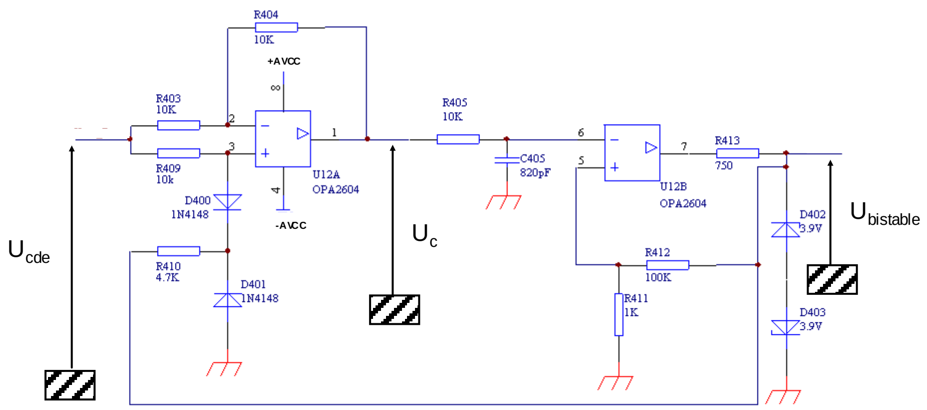
- la fréquence centrale du VCO égale à 200kHz doit être obtenue pour une tension de commande située au milieu de sa dynamique soit u_{cde}=2,5V.

⇨ la tension de commande u_{cde} doit être très supérieure à u_{seuil} afin de garantir la linéarisation de l'expression de la fréquence du VCO. En fixant u_{seuil}=0,25V, on en déduit le couple de résistances du bistable (1kΩ, 2kΩ).

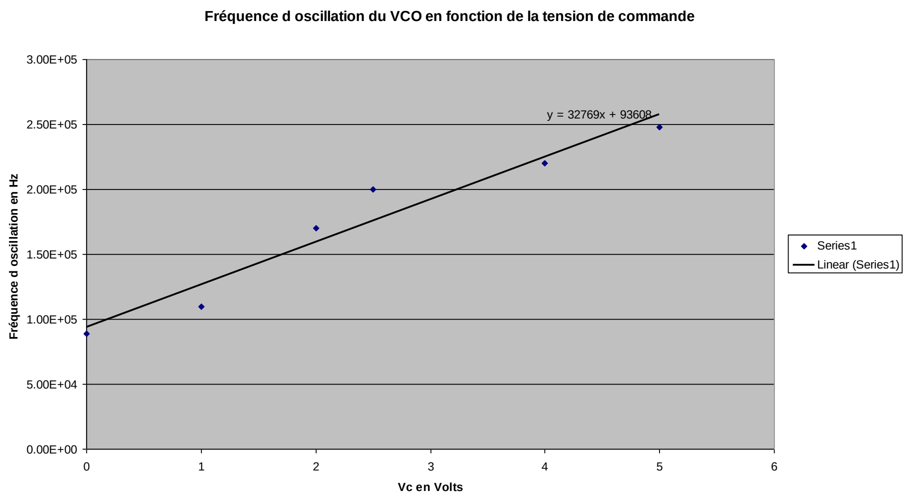
- La constante de temps du réseau RC est définie par :

$$RC = \frac{u_{cde} - u_{seuil}}{4u_{seuil}\,f}$$

avec u_{cde}=2,5V, u_{seuil}=250mV, f=200kHz, soit RC=11,25µs ce que permet d'obtenir le couple(1,5nF ; 7,5kΩ).



En relevant quelques points expérimentaux on peut interpoler l'équation de fonctionnement du VCO et déterminer l'excursion en fréquence du VCO : f_{min} = 89 KHz et f_{max} = 248 kHz



Remarque :

La non symétrie des plages d'excursion en fréquence par rapport à la fréquence d'oscillation centrale contredit donc l'hypothèse de la linéarité du système.

3.6 ~ Réalisation d'un VCO à partir d'un composant intégré type PLL HCT4046

Une approche « plus industrielle » consiste à utiliser un composant intégré du commerce type VCO. Etant donné que les VCO sont très souvent associés à la fonction boucle à verrouillage de phase (PLL), on se propose à titre d'exemple d'utiliser la PLL de la série 74HCT type 74HCT4046 qui est aussi classique (et rustique) que le 741 pour l'A.O. La mise en pratique de ce composant CMOS alimenté entre 0 et 5Volts s'effectue en analysant la documentation constructeur (data sheet) à laquelle le lecteur se référera.

A titre de comparaison avec le montage précédent, on se propose de réaliser un VCO ayant les mêmes caractéristiques :

- fréquence centrale du VCO égale à 200 kHz, pour un signal d'entrée de commande sur VCOin égal à ½ de V_{cc}, signal en sortie de la PLL numérique avec un rapport cyclique de 50%.

On se fixe une excursion en fréquence de part et d'autre de la fréquence centrale de 40kHz.

En connectant à la masse l'entrée INH qui permet de bloquer le composant, la fonction VCO est obtenue en rajoutant 3 composants passifs déterminés à partir d'abaques :

- un condensateur extérieur C_1
- une ou deux résistances R_1 et R_2.

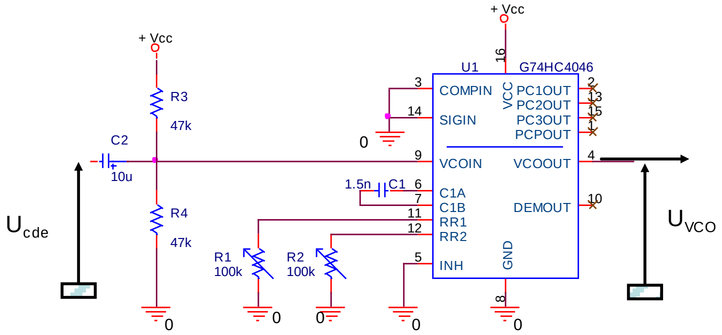
Le couple R_1 C_1 définit la fréquence centrale du VCO, alors que la résistance R_2 permet de basculer le VCO en mode « Sans fréquence d'offset » (R_2 infinie induira pour une tension de commande nulle une fréquence d'oscillation nulle), ou en mode « Avec Fréquence d'offset » (tension de commande nulle induit fréquence d'oscillation minimale).

On se place dans notre application dans le second mode de fonctionnement du VCO, où f_{min} =160 kHz doit être obtenue lorsque 0V est appliqué sur VCO_{in} alors que f_{max}=240kHz sera obtenue pour une tension VCO_{in}=+Vcc=5V.

Il est fondamental de souligner que la fréquence du VCO est liée à la tension d'alimentation Vcc, ce qui constitue le principal défaut de ce composant.

En supposant Vcc=5V parfaitement stabilisée, on détermine les valeurs des composants :

- C_1 ne devant pas être inférieur à 40 pF, on fixe C_1=1,5nF et R_1=25 kΩ qui sera ajustée au potentiomètre ;
- R_2=18kΩ satisfait la condition sur la fréquence f_{min}



Remarque sur la connexion de l'entrée du VCO à un signal audio :

On souhaite moduler en fréquence un signal audio relié à l'entrée VCOin. Afin de garantir la fréquence d'oscillation à 200kHz au milieu de la dynamique du signal d'entrée, on découple l'entrée du VCO par C_2, R_2 et R_3 qui assurent :

- une polarisation continue à $V_{CC}/2$
- une fonction filtre passe haut de fréquence de coupure $f_c=1/2\pi C_2(R_2//R_3)=$ 1Hz qui reste compatible avec le spectre d'un signal audio,
- une impédance d'entrée définie par $(R_2//R_3)=$ 24kΩ compatible avec tout appareil audio sortant un niveau ligne.

A tension de commande u_{cde} nulle, le signal observé en VCO_{OUT} est compatible avec les spécifications du cahier des charges : pour u_c=2,49V, la fréquence du VCO est égale à 200,1kHz.