

## Filtrage numérique

-O-O-O-

*Les documents sont autorisés – durée de l'épreuve 1h30 min – chaque question est sur deux points –**Le sujet est imprimé recto verso, il y a 10 questions plus une question bonus.*

-O-O-O-

L'Imagerie de Résonance Magnétique (IRM) exploite la résonance magnétique nucléaire (RMN) de l'hydrogène pour reconstituer une image qui caractérise la distribution et/ou les propriétés de l'eau présente dans les tissus biologiques. Le phénomène de RMN survient lorsqu'une onde électromagnétique est émise à une fréquence spécifique qui dépend de l'intensité du champ magnétique généré par l'aimant de l'équipement IRM (e.g. 300 MHz à  $B_0 = 7$  Tesla). Ainsi, dans ces conditions une partie de l'énergie de l'impulsion RF émise par l'antenne appelée « cage d'oiseau » (Fig 1.gauche) est absorbée par les noyaux d'hydrogène (phase d'excitation), c'est le retour à l'équilibre des noyaux d'hydrogène (phase de relaxation) qui est ensuite détecté, échantillonner et analysé pour la construction d'une image. Le signal de relaxation est extrêmement faible, si bien que la réception du signal se fait le plus souvent avec une deuxième antenne (antenne de réception) placée au plus près de la source du signal. Cette antenne de réception (Fig 1.droite) permet de « cartographier » l'échantillon en volume. Cependant, l'IRM travaille à une fréquence fixe, à la fréquence 300MHz.



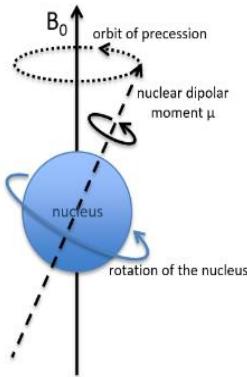
*Figure 1 : Cage d'oiseau (à gauche) et spire à positionner sur la zone à cartographier*

Le signal à étudier est l'écho IRM capté par l'antenne surfacique. Il faut dans un premier temps sélectionner une « tranche » pour une séquence typique d'écho de noyaux d'hydrogène. Tous les noyaux d'hydrogène ont un mouvement de rotation et décrivent un cône autour de l'axe de  $B_0$ : c'est le mouvement de précession. On peut appartenir le mouvement de précession au mouvement d'une toupie qui bascule et reste en équilibre en rotation (Fig.2). La vitesse de précession est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique. Tous les noyaux d'hydrogène ont le même mouvement de précession, donc sont à la même fréquence et même phase comme imposé par le champ magnétique principal  $B_0$ . A ce stade, il n'y a aucune différence observée de l'échantillon par la Transformée de Fourier.

***Afin de reconstituer l'image d'un échantillon, on devra définir les paramètres de la Transformée de Fourier Discrète : fréquence d'échantillonnage, ou encore solutions pour éviter les problèmes de distorsion.***

Les informations spatiales codées en fréquence et en phase sont nécessaires à la construction d'une image, nous avons en effet besoin de variations dans 2 axes différents pour pouvoir reconstituer une image à 2 dimensions. Pour cela on utilise des bobines de Helmholtz encore

appelées des bobines à gradient : l'application de champs de gradient superposés et dynamiquement changeants introduit des variations spatialement dépendantes de la fréquence et de la phase à travers l'échantillon. Par convention, les hautes fréquences spatiales sont cartographiées à la périphérie de la zone à cartographier et les basses fréquences spatiales sont cartographiées près de l'origine. De plus, les différents tissus dans les divers organes du corps sont plus ou moins denses en hydrogène et la réponse électrique de chaque région du corps est donc différente. Chaque région du corps apparaît donc distinctement sur les images finales. Connaissant la cartographie d'un corps « sain », on repère rapidement la présence de choses inhabituelles, comme une tumeur.



*Figure 2 : Illustration du mouvement de précession pour un noyau d'hydrogène et son moment magnétique associé, qui tourne autour de l'axe porté par le vecteur  $B_0$*

1) Si on souhaite échantillonner le signal de l'IRM de fréquence de précession de 300MHz, quelle devrait être la fréquence minimum d'échantillonnage  $F_e$ ?

2) Si le signal obtenu souffre finalement de distorsion, que pourrait-on faire pour résoudre ce problème ?

**Afin de reconstituer l'image d'un échantillon, on utilisera la Transformée de Fourier Discrète Inverse. On va dans cet examen faire l'étude de la Transformée de Fourier Discrète d'un filtre à phase linéaire.**

3) Tracer la réponse impulsionnelle  $h[n]$  du filtre tel que les coefficients  $b_0$  à  $b_4$  soient les seuls non nuls. On considérera pour le tracé que  $b_0 = b_4 = \frac{1}{2}$  et  $b_1 = b_3 = 1$  et  $b_2 = 2$ .

$$h[n] = b_0\delta[n] + b_1\delta[n - 1] + b_2\delta[n - 2] + b_3\delta[n - 3] + b_4\delta[n - 4]$$

Caractériser ce filtre en termes de récursivité, ordre, causalité, invariance temporelle, stabilité.

4) Donner son équation de récurrence ainsi que la structure transversale du filtre. Que simplifie la symétrie des coefficients ? la complexité spatiale ou algorithmique ?

5) Calculer sa transformée  $H(z)$  en z et en déduire l'expression de la réponse fréquentielle de ce filtre  $H(jf)$ .

6) Montrer que la périodicité spectrale de cette transformée est égale à  $F_e$  en considérant que  $b_0 = b_4 = \frac{1}{2}$  et  $b_1 = b_3 = 1$  et  $b_2 = 2$  (valeurs précédentes) ? En déduire l'intervalle

fondamental. Est-ce que le module sera paire ou impaire sur l'intervalle fondamental? Même question pour la phase ?

7) Calculer le module de  $H(jf)$ . Tracer le module sur l'intervalle fondamental. On prendra  $F_e$  déterminée à la question 1). Retrouvez-vous la propriété sur la parité ou l'imparité de la fonction (cf question 6).

8) En déduire la nature du filtre.

9) Tracer la phase sur l'intervalle fondamental. Retrouvez-vous la propriété sur la parité ou l'imparité de la fonction (cf question 6). Observez-vous bien que le filtre est à phase linéaire ?

10). Que permet la linéarité de la phase ? Est-ce un avantage ou un inconvénient ? N'hésitez pas à ajouter des courbes pour illustrer votre propos.

**Conclusion : est-ce qu'on a restitué l'image de l'échantillon ?**

Question bonus sur 1 point : Est-ce que ce filtre permet de reconstituer partiellement l'image de l'IRM ?