Chapitre 2 : Modélisation

Yassine ARIBA

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

LAAS CNRS

version : 9-2022

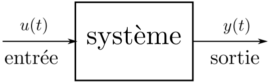
Sommaire

1. Exemples introductifs
2. Fonction de transfert
3. Schéma fonctionnel

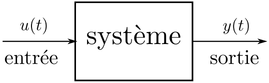
Sommaire

1. Exemples introductifs
2. Fonction de transfert
3. Schéma fonctionnel

Soit un système à commander :



Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

Soit un système à commander :

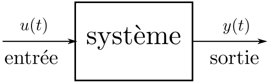
$$\xrightarrow[\text{entrée}]{u(t)} \boxed{\text{système}} \xrightarrow[\text{sortie}]{y(t)}$$

Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

$\Rightarrow$ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Soit un système à commander :



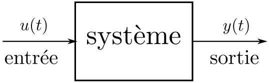
Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

$\Rightarrow$ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

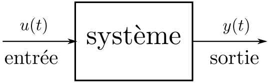
Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

$\Rightarrow$ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

$\Rightarrow$ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

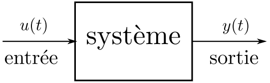
$\Rightarrow$ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

$\Rightarrow$ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

$\Rightarrow$ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

$\Rightarrow$ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

$\Rightarrow$ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

$\Rightarrow$ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

$\hookrightarrow$ déterminer une relation entre $u(t)$ et $y(t)$

Pourquoi la modélisation ?

Ce travail existe dans toutes les disciplines scientifiques

$\Rightarrow$ vise à établir un modèle de l'objet d'étude

C'est une étape nécessaire pour

- comprendre et analyser un processus physique / dispositif / technologie...
- pouvoir prédire son comportement
- pour développer des outils de simulation

Pourquoi la modélisation ?

Ce travail existe dans toutes les disciplines scientifiques

$\Rightarrow$ vise à établir un modèle de l'objet d'étude

C'est une étape nécessaire pour

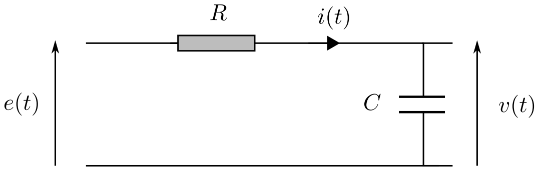
- comprendre et analyser un processus physique / dispositif / technologie...
- pouvoir prédire son comportement
- pour développer des outils de simulation

★ les modèles sont généralement des représentations mathématiques

⚠ un modèle est toujours une représentation approchée de la réalité

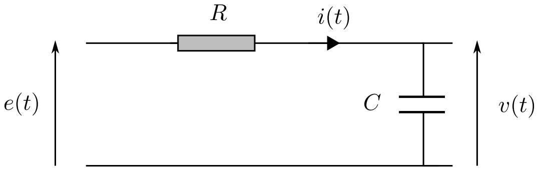
Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique



Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique

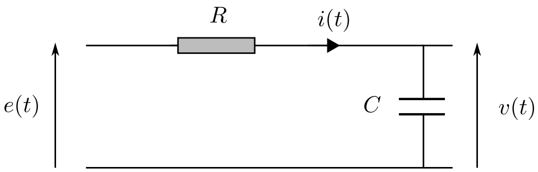


Appliquons la loi des mailles

$$e(t) = Ri(t) + v(t) \qquad \text{sachant que} \qquad i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique



Appliquons la loi des mailles

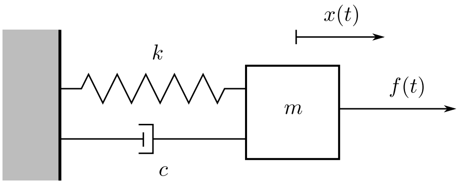
$$e(t) = Ri(t) + v(t) \qquad \text{sachant que} \qquad i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

modèle du système :

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t)$$

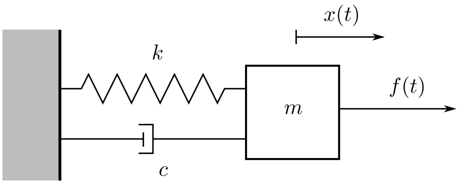
Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique



Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique

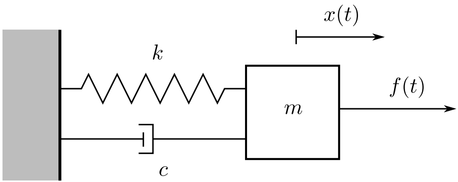


Appliquons le principe fondamental de la dynamique

$$m\ddot{x}(t) = f(t) + f_{ressort}(t) + f_{amort}(t) \qquad \text{sachant que} \qquad \begin{cases} f_{ressort}(t) = -kx(t) \\ f_{amort}(t) = -c\dot{x}(t) \end{cases}$$

Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique



Appliquons le principe fondamental de la dynamique

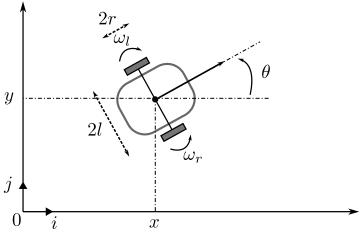
$$m\ddot{x}(t) = f(t) + f_{ressort}(t) + f_{amort}(t) \qquad \text{sachant que} \qquad \begin{cases} f_{ressort}(t) = -kx(t) \\ f_{amort}(t) = -c\dot{x}(t) \end{cases}$$

modèle du système :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

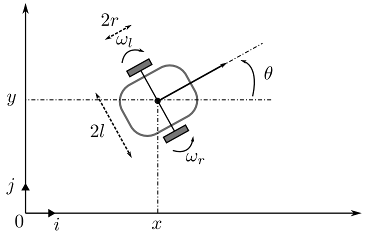
Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes



Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes

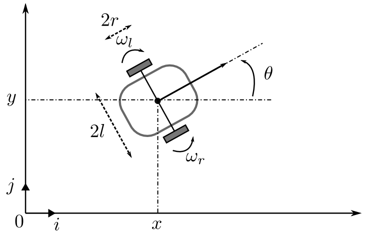


les vitesses de translation et rotation du mobile sont données par

$$v = r\frac{\omega_r + \omega_l}{2} \qquad \text{et} \qquad \omega = r\frac{\omega_r - \omega_l}{2l}$$

Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes



les vitesses de translation et rotation du mobile sont données par

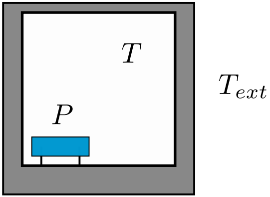
$$v = r\frac{\omega_r + \omega_l}{2} \qquad \text{et} \qquad \omega = r\frac{\omega_r - \omega_l}{2l}$$

modèle du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

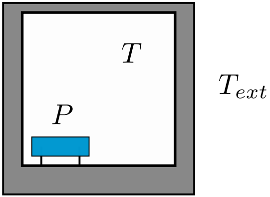
Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte



Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte

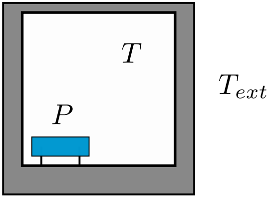


La déperdition et le bilan énergétique s'écrivent

$$P_{pertes} = k(T - T_{ext}) \qquad \text{et} \qquad P - P_{pertes} = c\frac{dT}{dt}$$

Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte



La déperdition et le bilan énergétique s'écrivent

$$P_{pertes} = k(T - T_{ext}) \qquad \text{et} \qquad P - P_{pertes} = c\frac{dT}{dt}$$

modèle du système :

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T}$$

Exemple : dynamique des populations

Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Exemple : dynamique des populations

Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- α : taux de naissances
- β : taux de décès

Exemple : dynamique des populations

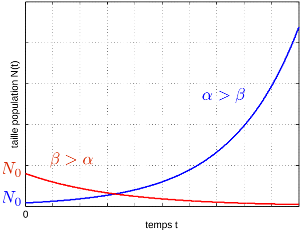
Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- α : taux de naissances
- β : taux de décès



Exemple : dynamique des populations

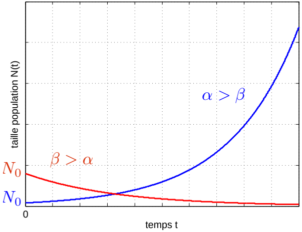
Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \quad \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- α : taux de naissances
- β : taux de décès



Second modèle :

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

avec

- $r = \alpha - \beta$
- K : nombre max d'individus

Exemple : dynamique des populations

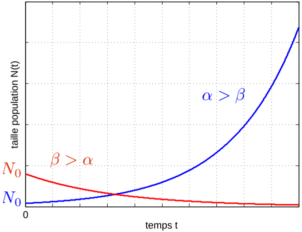
Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- α : taux de naissances
- β : taux de décès

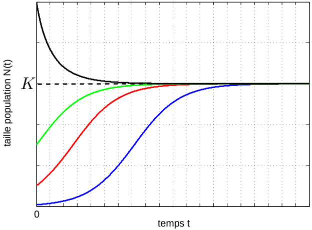


Second modèle :

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

avec

- $r = \alpha - \beta$
- K : nombre max d'individus



Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v\cos\theta \\ \dot{y} & = & v\sin\theta \\ \dot{\theta} & = & \omega \end{array}\right.$$

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t) \qquad \Rightarrow \qquad \text{linéaire}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad \Rightarrow \qquad \text{linéaire}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v\cos\theta \\ \dot{y} & = & v\sin\theta \\ \dot{\theta} & = & \omega \end{array} \right.$$

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T} \qquad \Rightarrow \qquad \text{linéaire}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t) \qquad \Rightarrow \qquad \text{linéaire}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad \Rightarrow \qquad \text{linéaire}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v\cos\theta \\ \dot{y} & = & v\sin\theta \\ \dot{\theta} & = & \omega \end{array} \right.$$

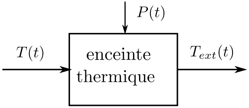
$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T} \qquad \Rightarrow \qquad \text{linéaire}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

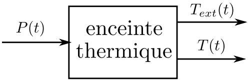
⋆ **même formalisme mathématique.**

QCM interactif

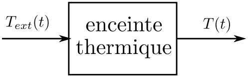
Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple de l'enceinte thermique ?



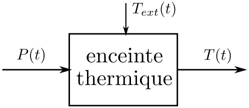
(A)



(B)



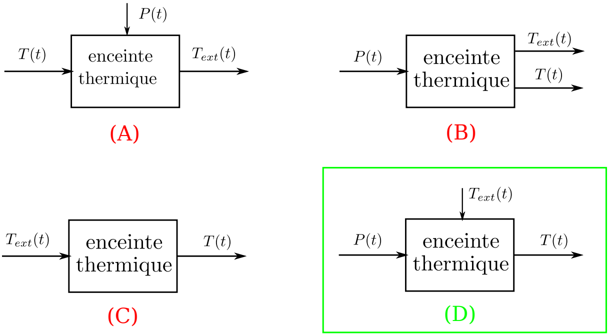
(C)



(D)

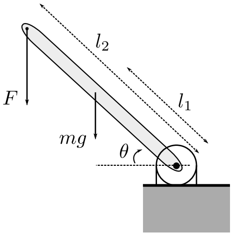
QCM interactif

Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple de l'enceinte thermique ?



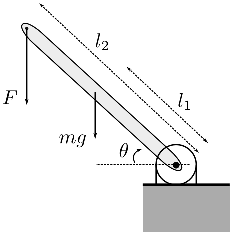
Autre exemple

Modélisation d'un bras mécanique motorisé



Autre exemple

Modélisation d'un bras mécanique motorisé



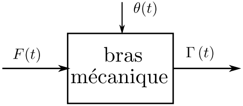
Relation entre la position angulaire θ et les forces, dont le couple moteur Γ :

$$J\ddot{\theta}(t) = -\Big(mgl_1 + l_2 F(t)\Big)\cos\theta(t) + \Gamma(t)$$

F est la force due aux masses transportées.

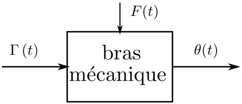
QCM interactif

Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple du bras mécanique ?

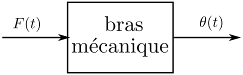


(A)

(B)



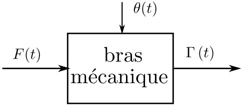
(C)



(D)

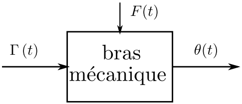
QCM interactif

Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple du bras mécanique ?

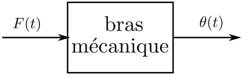


(A)

(B)



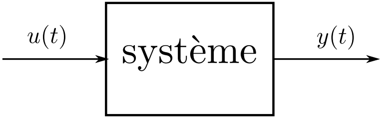
(C)



(D)

Les systèmes linaires invariants

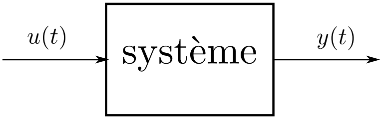
Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI



Relation entrée-sortie : $u(t) \to y(t)$

Les systèmes linaires invariants

Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI

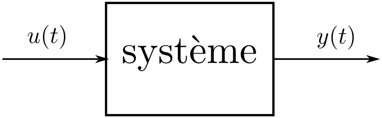


Relation entrée-sortie : $u(t) \rightarrow y(t)$

$\Rightarrow$ **équations différentielles linéaires à coefficients constants**

Les systèmes linaires invariants

Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI



Relation entrée-sortie : $u(t) \rightarrow y(t)$

$\Rightarrow$ **équations différentielles linéaires à coefficients constants**

Exemple : $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t)$

Sommaire

1 Exemples introductifs

2 Fonction de transfert

3 Schéma fonctionnel

La transformée de Laplace

La transformée de Laplace (TL) d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

On notera $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$

La transformée de Laplace

La transformée de Laplace (TL) d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

On notera $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$

- opération mathématique
- transforme une fonction temporelle en une fonction "abstraite" complexe
- intérêt ? $\rightarrow$ ses propriétés
- permet un traitement plus simple de certaines opérations
- généralise la transformée de Fourier

La transformée de Laplace

soit deux fonctions $f(t) \xrightarrow{\text{TL}} \hat{f}(s)$ et $g(t) \xrightarrow{\text{TL}} \hat{g}(s)$

Propriétés :

- ▷ Linéarité : $af(t) + bg(t) \xrightarrow{\text{TL}} a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)$, a et b constants
- ▷ Dérivation : $\frac{d}{dt} f(t) \xrightarrow{\text{TL}} s\hat{f}(s) - f(0)$
- ▷ Intégration : $\int_0^t f(\theta)d\theta \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{s}\hat{f}(s)$
- ▷ Translation : $f(t-\tau) \xrightarrow{\text{TL}} e^{-s\tau}\hat{f}(s)$ τ constant
- ▷ Valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{f}(s)$

Table des transformées

les fonctions temporelles $f(t)$ sont définies pour $t \geq 0$ (0 pour $t < 0$)

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
échelon	1	$\frac{1}{s}$
rampe	t	$\frac{1}{s^2}$
puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
exponentielle décroissante	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Table des transformées

les fonctions temporelles $f(t)$ sont définies pour $t \geq 0$ (0 pour $t < 0$)

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
sinus	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
décroissance exponentielle d'un sinus	$e^{-at} \sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'un cosinus	$e^{-at} \cos(bt)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'une puissance n-ième	$\dfrac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$

QCM interactif

Sachant que

$$f(t) = 2t^3 - t^2 \quad \xrightarrow{TL} \quad \hat{f}(s) = \frac{12}{s^4} - \frac{2}{s^3}$$

sans faire de calcul, quelle est l'expression de la TL de la fonction dérivée $g(t) = \dot{f}(t)$?

(A) $\hat{g}(s) = \frac{12}{s^3} - \frac{2}{s^2}$

(B) $\hat{g}(s) = 12s^3 - 2s$

(C) $\hat{g}(s) = \frac{3}{s^5} - \frac{1}{s^4}$

(D) $\hat{g}(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^2}$

QCM interactif

Sachant que

$$f(t) = 2t^3 - t^2 \qquad \xrightarrow{TL} \qquad \hat{f}(s) = \frac{12}{s^4} - \frac{2}{s^3}$$

sans faire de calcul, quelle est l'expression de la TL de la fonction dérivée $g(t) = \dot{f}(t)$?

(A) $\hat{g}(s) = \frac{12}{s^3} - \frac{2}{s^2}$

(B) $\hat{g}(s) = 12s^3 - 2s$

(C) $\hat{g}(s) = \frac{3}{s^5} - \frac{1}{s^4}$

(D) $\hat{g}(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^2}$

QCM interactif

Quelle est la fonction temporelle correspondant à la fonction en s ?

$$\hat{f}(s) = \frac{4}{2s+1}$$

(A) $f(t) = 4e^{-2t}$

(B) $f(t) = 2e^{-0.5t}$

(C) $f(t) = 4e^{t}$

(D) $f(t) = e^{4t}$

QCM interactif

Quelle est la fonction temporelle correspondant à la fonction en s ?

$$\hat{f}(s) = \frac{4}{2s+1}$$

(A) $f(t) = 4e^{-2t}$

(B) $f(t) = 2e^{-0.5t}$

(C) $f(t) = 4e^{t}$

(D) $f(t) = e^{4t}$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) \;=\; \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\Big\downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\Big\downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\hat{y}(s)\Big(5s^3 + 2s^2 + s + 4\Big) = \Big(s + 2\Big)\hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) \;=\; \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}$$

$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\hat{y}(s)\Big(5s^3 + 2s^2 + s + 4\Big) = \Big(s + 2\Big)\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\hat{y}(s) = \frac{s + 2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4}\hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) \ = \ \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{y}(s)\Big(5s^3 + 2s^2 + s + 4\Big) = \Big(s + 2\Big)\hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{y}(s) = \frac{s+2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4}\hat{u}(s)$$

Nouvelle relation entrée-sortie : **la fonction de transfert**

$$\boxed{\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)}$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \;=\; b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \;=\; b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \cdots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \cdots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \;=\; b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\Big\downarrow \;\mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \cdots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \cdots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

Fonction de transfert : $$\boxed{G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \;=\; b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \cdots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \cdots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

Fonction de transfert : $\boxed{G(s) = \dfrac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \dfrac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}}$

- se définie comme le rapport : TL sortie sur TL entrée, avec CI nulles
- Pour les SLI, la fonction de transfert est toujours une fraction rationnelle

Fonctions de transfert

Autre exemple :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - 2y(t) \; = \; 6u(t)$$

Fonctions de transfert

Autre exemple :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - 2y(t) \;=\; 6u(t)$$

$$\Big\downarrow \;\mathcal{L}$$

$$s^2\hat{y}(s) + 4s\hat{y}(s) - 2\hat{y}(s) = 6\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{6}{s^2 + 4s - 2}$$

QCM interactif

Quelle est la fonction de transfert de l'équation différentielle ?

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) \;=\; \dot{u}(t) + 2u(t)$$

(A) $G(s) = \dfrac{s+2}{s+3}$

(B) $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+3s}$

(C) $G(s) = \dfrac{2(s+1)}{3s+1}$

(D) $G(s) = \dfrac{2s+1}{3s}$

QCM interactif

Quelle est la fonction de transfert de l'équation différentielle ?

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) \; = \; \dot{u}(t) + 2u(t)$$

(A) $G(s) = \dfrac{s+2}{s+3}$

(B) $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+3s}$

(C) $G(s) = \dfrac{2(s+1)}{3s+1}$

(D) $G(s) = \dfrac{2s+1}{3s}$

Quelques définitions :

- L'**ordre** d'un système est le degré du polynôme du dénominateur (n).
- Le système est dit **strictement propre** (**propre**), si $n > m$ ($n = m$).
- Les **pôles** sont les racines du dénominateur.
- Les **zéros** sont les racines du numérateur.

Quelques définitions :

- L'**ordre** d'un système est le degré du polynôme du dénominateur (n).
- Le système est dit **strictement propre** (**propre**), si $n > m$ ($n = m$).
- Les **pôles** sont les racines du dénominateur.
- Les **zéros** sont les racines du numérateur.

Exemple du système masse-ressort :

La relation force - position est décrite par

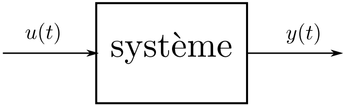
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

sa fonction de transfert s'écrit $$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{f}(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$\Rightarrow$ système d'ordre 2 ; sans zéro ; les 2 pôles sont solutions de $ms^2 + cs + k = 0$.

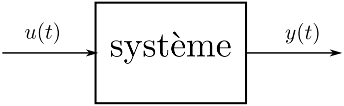
Deux représentations

Pour un système linéaire invariant



Deux représentations

Pour un système linéaire invariant



Deux modèles :

dans le domaine temporel

⇒ équation différentielle

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 6u(t)$$

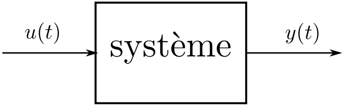
dans le domaine de Laplace

⇒ fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{6}{s+2}\hat{u}(s)$$

Deux représentations

Pour un système linéaire invariant



Deux modèles :

dans le domaine temporel

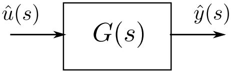
$\Rightarrow$ équation différentielle

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 6u(t)$$

dans le domaine de Laplace

$\Rightarrow$ fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{6}{s+2}\hat{u}(s)$$



Sommaire

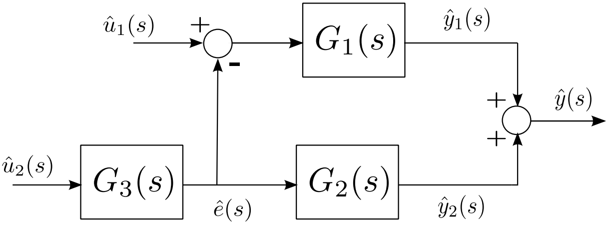
1 Exemples introductifs

2 Fonction de transfert

3 Schéma fonctionnel

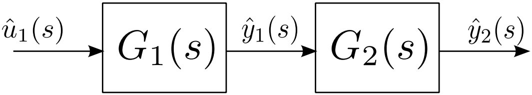
Schéma fonctionnel

Représentation graphique des systèmes complexes

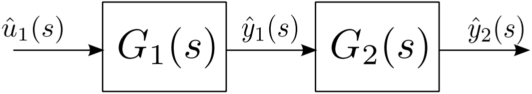


Le formalisme des fonctions de transfert est très pratique pour ce type de représentation.

Mise en série de deux systèmes



Mise en série de deux systèmes

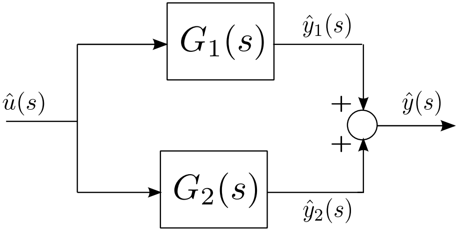


$$\begin{aligned}\hat{y}_2(s) &= G_2(s)\hat{y}_1(s)\\ &= G_2(s)G_1(s)\hat{u}_1(s)\end{aligned}$$

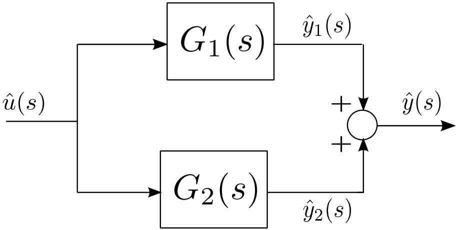
Transfert équivalent :

$$F(s) = G_2(s) \times G_1(s)$$

Mise en parallèle de deux systèmes



Mise en parallèle de deux systèmes

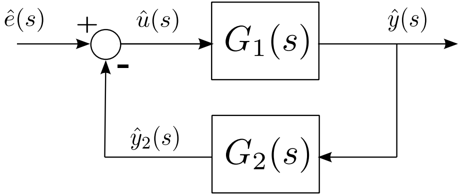


$$
\begin{aligned}
\hat{y}(s) &= \hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s) \\
&= \Big(G_1(s) + G_2(s)\Big)\,\hat{u}(s)
\end{aligned}
$$

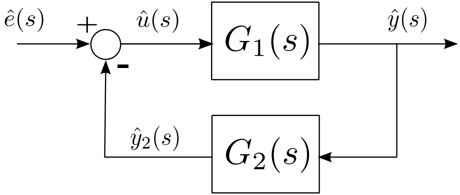
Transfert équivalent :

$$F(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

Interconnexion feedback



Interconnexion feedback

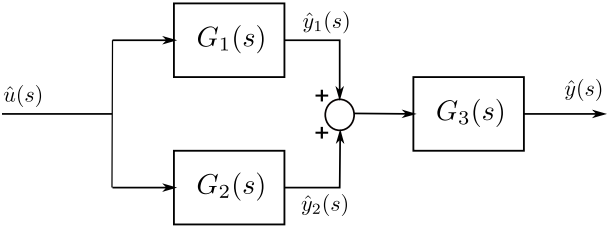


$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= G_1(s)\hat{u}(s) \\ \hat{u}(s) &= \hat{e}(s) - G_2(s)\hat{y}(s) \end{aligned}$$

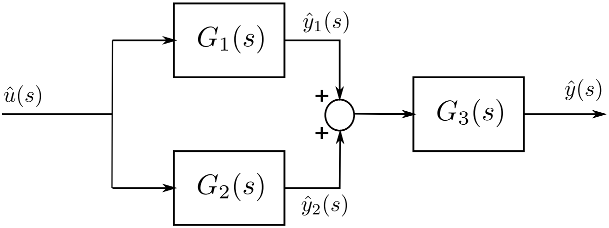
Transfert équivalent :

$$F(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Exemple 1



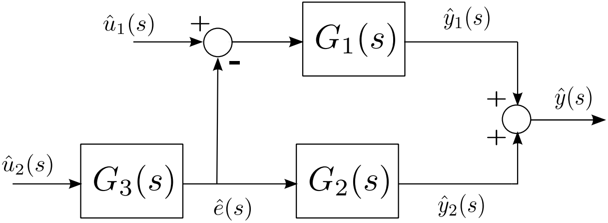
Exemple 1



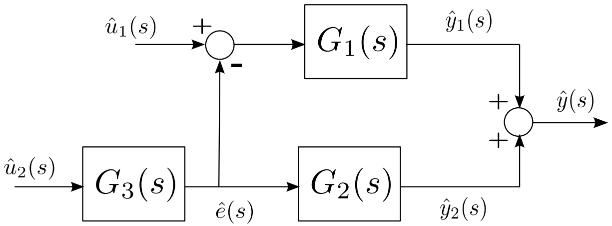
Transfert équivalent :

$$\hat{y}(s) = \underbrace{G_3(s)\Big(G_1(s) + G_2(s)\Big)}_{F(s)}\,\hat{u}(s)$$

Exemple 2



Exemple 2



Transfert équivalent :

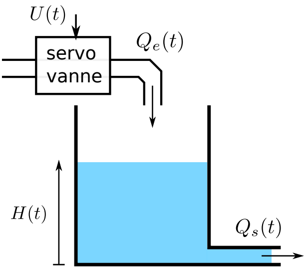
$$\hat{y}(s) = F_1(s)\hat{u}_1(s) + F_2(s)\hat{u}_2(s)$$

avec

$$F_1(s) = G_1(s) \qquad \text{et} \qquad F_2(s) = \Big(G_2(s) - G_1(s)\Big)G_3(s)$$

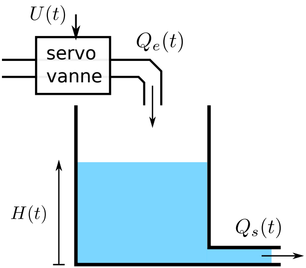
Exemple concret 1

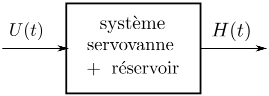
Contrôle du niveau d'un réservoir



Exemple concret 1

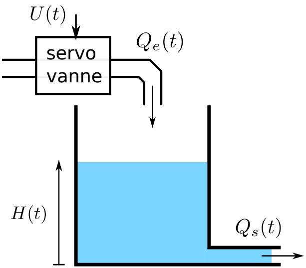
Contrôle du niveau d'un réservoir

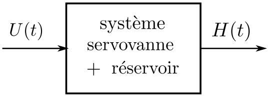




Exemple concret 1

Contrôle du niveau d'un réservoir





modèle réservoir :

$$A\frac{dH}{dt}(t) = Q_e(t) - Q_s(t)$$

$$A\frac{dH}{dt}(t) = Q_e(t) - K\sqrt{H(t)}$$

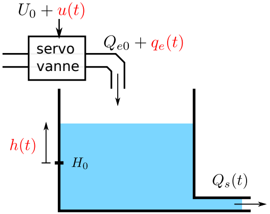
modèle servo-vanne :

$$\tau_{sv}\dot{Q}_e(t) + Q_e(t) = k_{sv}u(t)$$

Exemple concret 1

Considérons des petites variations autour d'un point de fonctionnement :

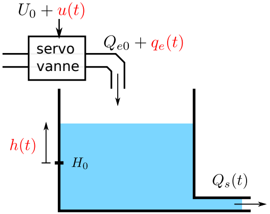
$$\begin{cases} \text{tension} & \rightarrow & U(t) = U_0 + u(t) \\ \text{débit} & \rightarrow & Q_e(t) = Q_{e0} + q_e(t) \\ \text{hauteur} & \rightarrow & H(t) = H_0 + h(t) \end{cases}$$



Exemple concret 1

Considérons des petites variations autour d'un point de fonctionnement :

$$\begin{cases} \text{tension} & \rightarrow & U(t) = U_0 + u(t) \\ \text{débit} & \rightarrow & Q_e(t) = Q_{e0} + q_e(t) \\ \text{hauteur} & \rightarrow & H(t) = H_0 + h(t) \end{cases}$$



modèles approchés pour petits signaux

réservoir : $A\dot{h}(t) = q_e(t) - \alpha h(t)$

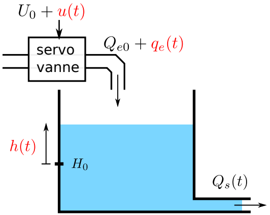
avec $\alpha = \frac{Q_{e0}}{2H_0}$

servovanne : $\tau_{sv}\dot{q}_e(t) + q_e(t) = k_{sv}u(t)$

Exemple concret 1

Considérons des petites variations autour d'un point de fonctionnement :

$$\begin{cases} \text{tension} & \rightarrow & U(t) = U_0 + u(t) \\ \text{débit} & \rightarrow & Q_e(t) = Q_{e0} + q_e(t) \\ \text{hauteur} & \rightarrow & H(t) = H_0 + h(t) \end{cases}$$

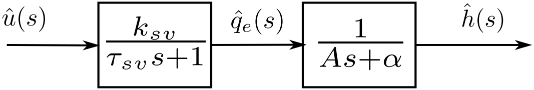


modèles approchés pour petits signaux

réservoir : $A\dot{h}(t) = q_e(t) - \alpha h(t)$

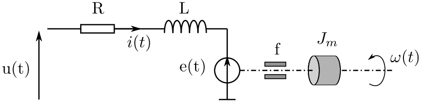
avec $\alpha = \frac{Q_{e0}}{2H_0}$

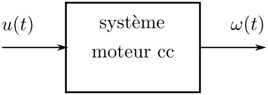
servovanne : $\tau_{sv}\dot{q}_e(t) + q_e(t) = k_{sv}u(t)$



Exemple concret 2

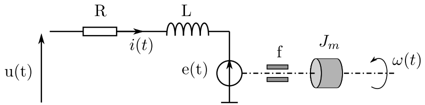
Le moteur à courant continu : un système électromécanique

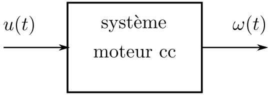




Exemple concret 2

Le moteur à courant continu : un système électromécanique



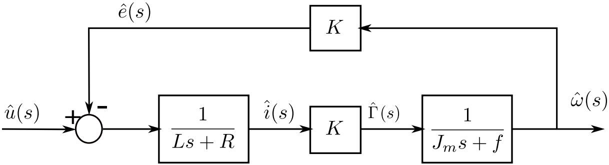


modèle :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t) + e(t), & \text{avec } e(t) = K\omega(t) \\ J_m\dot{\omega}(t) = \Gamma(t) - f\omega(t), & \text{avec } \Gamma(t) = Ki(t) \end{cases}$$

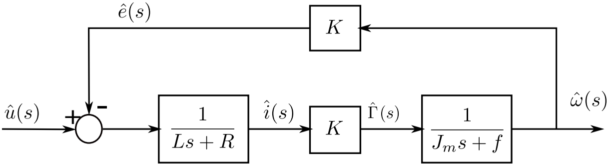
Exemple concret 2

Schéma bloc



Exemple concret 2

Schéma bloc



Fonction de transfert équivalent

$$F(s) = \frac{\hat{\omega}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{K}{LJ_m s^2 + (RJ_m + Lf)s + (Rf + K^2)}$$

QCM interactif

Dans l'exemple 2, quelle est l'expression de $\hat{y}_2(s)$?

(A) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)\hat{e}(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

(B) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)$

(C) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)\Big(\hat{e}(s) - \hat{u}_1(s)\Big)$

(D) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

QCM interactif

Dans l'exemple 2, quelle est l'expression de $\hat{y}_2(s)$?

(A) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)\hat{e}(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

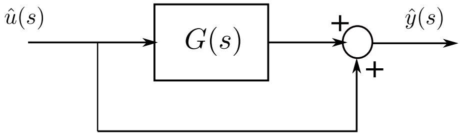
(B) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)$

(C) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)\Big(\hat{e}(s) - \hat{u}_1(s)\Big)$

(D) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

QCM interactif

Quelle est la relation entrée-sortie correcte ?



(A) $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$

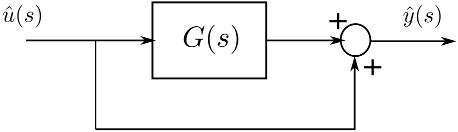
(B) $\hat{y}(s) = \dfrac{G(s)}{1 + G(s)}\hat{u}(s)$

(C) $\hat{y}(s) = \big(G(s) + 1\big)\hat{u}(s)$

(D) $\hat{y}(s) = G(s) + \hat{u}(s)$

QCM interactif

Quelle est la relation entrée-sortie correcte ?



(A) $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$

(B) $\hat{y}(s) = \dfrac{G(s)}{1 + G(s)}\hat{u}(s)$

(C) $\hat{y}(s) = \big(G(s) + 1\big)\hat{u}(s)$

(D) $\hat{y}(s) = G(s) + \hat{u}(s)$