

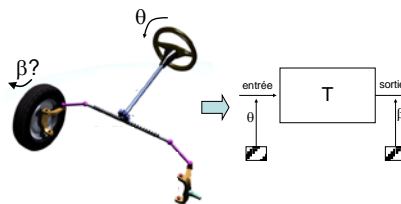
# Fonction de transfert et Diagramme de Bode

Qu'ils soient à dominante mécanique, électronique, biologique, chimique, ou même humain, le scientifique a toujours cherché à prédire le fonctionnement temporel des phénomènes et objets de son environnement. La première technique mathématique enseignée est la résolution d'une équation différentielle, technique éprouvée mais qui requiert des méthodes et une connaissance du système pour poser l'équation à résoudre. La seconde méthode consiste à déterminer la fonction de transfert du système à étudier, par des méthodes de description ou d'identification expérimentale.

Pourquoi ce terme de fonction de transfert ? Car c'est l'opérateur mathématique relie le(s) entrée(s) à la sortie d'un système. Vu sous l'angle du praticien, c'est la fonction qui **TRANSFORME** l'entrée en sortie du système, d'où le qualificatif de fonction de transfert.

## I. NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT

Illustrons la définition de l'utilisation de la notion de fonction de transfert sur l'exemple ci-dessous.



On souhaite connaître la relation entre l'angle  $\theta$  de rotation du volant et l'angle  $\beta$  de rotation des roues d'un véhicule. Sans modéliser l'ensemble des éléments mécaniques de la chaîne cinématique de transmission, la fonction de transfert  $T$ , se définit dans cet exemple à partir de la relation  $T\theta = \beta$ , d'où l'expression :

$$T = \frac{\text{sortie}}{\text{entrée}} = \frac{\text{image électrique grandeur } \beta}{\text{image électrique grandeur } \theta} = \frac{u_s}{u_e} \quad \text{qui ne peut jamais s'exprimer directement dans}$$

l'espace du temps, mais qui s'exprime dans l'espace des pulsations (variable  $\omega$ ) ou de fréquences ( $f$ ).

### 1.1 Régime permanent calculé à partir de la résolution de l'équation différentielle

Considérons une fonction de transfert d'ordre un qui s'écrit sous la forme :

Notions métier et théorèmes pour modéliser

$$\underline{T}(f) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{T_0}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad \text{ou} \quad \underline{T}(\omega) = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{2\pi f_c}} = \frac{T_0}{1 + j\omega\tau_c} \quad \text{avec} \quad \tau_c = \frac{1}{2\pi f_c} \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi f$$

La réponse en régime permanent du montage précédent est donnée par la solution particulière de l'équation différentielle :

$$\tau_c \frac{du_s}{dt} + u_s = T_0 u_e ; \quad \text{où } u_e \text{ est une tension constante, d'où } u_s = T_0 u_e$$

En régime permanent sinusoïdal, à la tension différentielle d'entrée  $u_e(t) = U \sin \omega t$  correspond la solution particulière  $u_s$  de la forme  $u_s(t) = U \sin(\omega t + \beta)$ .

En injectant la forme de la solution dans l'équation différentielle, on identifie les constantes  $K$  et  $\phi$  d'après l'expression :

$$K \sin(\omega t + \phi) + K \tau_c \omega \cos(\omega t + \phi) = T_0 U \sin \omega t$$

Par analogie avec le plan des complexes (les fonctions sinus et cosinus étant déphasées de  $\pi/2$ ), le premier membre de l'équation précédente peut se mettre sous la forme module et argument :

$$K \sin(\omega t + \phi) + K \tau_c \omega \cos(\omega t + \phi) = K \sqrt{1 + (\tau_c \omega)^2} \sin(\omega t + \phi + \theta)$$

Avec

$$\theta = \text{Arc tan}(T_0 \omega / 1) = \text{Arc tan}(T_0 \omega)$$

En identifiant avec le second membre de l'équation différentielle, il vient :

$$K = \frac{T_0 U}{\sqrt{1 + (\tau_c \omega)^2}} = |\underline{T}(\omega)| U$$

$$\phi = -\theta = -\text{Arc tan}(T_0 \omega) = \text{Arg}[\underline{T}(\omega)]$$

Il s'en suit que la réponse du système en régime permanent pour une entrée différentielle sinusoïdale  $U \sin \omega t$  est définie par l'expression :

$$u_s(t) = |\underline{T}(\omega)| U \sin \{ \omega t + \text{Arg}[\underline{T}(\omega)] \}$$

sous réserve de satisfaire les trois critères de non saturation.

AINSI en traçant graphiquement  $|\underline{T}(f)|$  et  $\text{Arg}[\underline{T}(f)]$  on peut représenter TOUTES les solutions en régime sinusoïdal.

**Hendrik Wade Bode** (24 décembre 1905 - 22 juin 1982) est un ingénieur, chercheur et inventeur américain d'origine néerlandaise. Pionnier de la régulation moderne et des télécommunications, il a révolutionné ces domaines tant dans leurs contenus que dans leurs méthodes d'application. Ses recherches ont eu un impact sur de nombreux autres domaines de l'ingénierie, et ont posé les fondations d'innovations récentes telles qu'ordinateurs, robots ou téléphones portables. Reconnu depuis longtemps dans le monde scientifique, notamment pour avoir mis au point les diagrammes de Bode, une méthode de représentation de l'amplitude et de la phase d'un système.

#### Sommaire [masquer]

- 1 Éducation
- 2 Débuts aux Laboratoires Bell
- 3 Seconde Guerre mondiale et nouvelles inventions
  - 3.1 Réorientation des recherches
  - 3.2 Première boucle de contrôle à distance et armes robotisées
    - 3.2.1 Boucler la boucle
    - 3.2.2 Un ordinateur qui ne dit pas son nom
    - 3.2.3 Un robot est né
- 4 Références
- 5 Liens externes

#### Hendrik Wade Bode



Hendrik Wade Bode

<b>Naissance</b>	24 décembre 1905 Madison, Wisconsin (États-Unis)
<b>Décès</b>	21 juin 1982 (à 76 ans) Cambridge, Massachusetts (États-Unis)
<b>Domicile</b>	Cambridge
<b>Nationalité</b>	Américaine
<b>Domaines</b>	Régulation Physique

## 1.2 Représentation graphique dans le diagramme de BODE

L'exploitation d'un tracé référencé par rapport à des axes gradués linéairement n'est pas envisageable :

- en abscisse, l'intervalle des fréquences s'étend de quelques Hz à quelques centaines de MHz,
- en ordonnée le module du gain, varie de  $T_0$  à des valeurs inférieures à l'unité.

Pour déterminer l'expression mathématique du gain  $|T|$  en fonction de la fréquence  $f$  on lui substitue une représentation dans le plan de BODE où :

- en abscisse, les fréquences sont portées sur une échelle logarithmique,
- en ordonnée, les gains sont portés sur une échelle linéaire graduée en décibels.

On définit le gain en tension exprimé en décibels par la relation :

$$G_{u,dB} = 20 \lg |T(f)| = 20 \lg \left| \frac{u_s(f)}{e(f)} \right|$$

A titre d'exemple un gain de  $100000=10^5$  correspond à  $20 \lg 10^5 = 100$  dB.

On peut aussi remarquer que la « transcription d'un module », bien que défini strictement positif, en décibels, peut entraîner des valeurs négatives dès lors que la module sera inférieur à l'unité.

### Remarque sur le décibel et le son:

1) Issue d'un quotient entre deux grandeurs de même dimension, cette unité n'a pas de dimension physique. On connaît un exemple d'application dédiée à la « mesure » du niveau sonore qui résulte d'une pression acoustique. On définit la relation de référence entre dB audio et pression: 0 dB équivaut à  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa. La pression acoustique  $P$  est liée à l'intensité sonore  $I$  ou densité de puissance par l'impédance acoustique :  $I \text{ (W/m}^2\text{)} = P^2 \text{ (Pa)} / R$  ; avec  $R$  impédance de l'air définie à 400 unités S.I. à l'air libre.

Le seuil de perception est défini à 0dB (soit une pression RMS de  $20 \mu\text{Pa}$  ou une intensité de  $1 \text{pW/m}^2$ ) alors que le seuil de la douleur est estimé à 120 dB ( $20 \text{Pa}$  ou  $1 \text{W/m}^2$ ).

2) Tracer  $20 \log \{ T_0 / [1 + (f/f_c)^2]^{1/2} \}$  avec une fonction logarithme base10 incluant une racine carrée est inenvisageable sans moyen de calcul, aussi, en pratique on préfère effectuer le tracé des asymptotes en repérant **les points caractéristiques**.

## 1.3 Tracé asymptotique dans le diagramme de Bode

En décomposant l'espace des fréquences en trois zones, on identifie **sans calculs** le tracé des asymptotes :

**Zone i)** Pour  $f_1 \ll f_c$  on a  $|T(f)| \cong T_0$ , valeur réelle d'où :

- une phase nulle (ou un déphasage nul entre le signal de sortie et le signal d'entrée)
- une asymptote du module représentée par la droite horizontale

$$|T(f_1)|_{u,dB} = 20 \lg T_0 = G_{u,dB}$$

**Zone ii)** Pour  $f \gg f_c$  on a :  $\underline{T}(f) \cong \frac{T_0}{j \frac{f}{f_c}} \cong -\frac{j f_c T_0}{f}$

- l'asymptote du module est définie par

$$|T(f)|_{u,dB} = 20 \lg T_0 - 20 \lg \left( \frac{f}{f_0} \right) = G_{u,dB} - 20 \lg \left( \frac{f}{f_0} \right) \text{ qui dans le tracé logarithmique représente l'équation}$$

d'une droite dont le coefficient directeur (la pente) vaut -20dB/dec où une décade correspond à une multiplication par dix de la fréquence ce qui se traduit par la graduation supérieure sur un tracé logarithmique.

- la phase est constante et égale à  $-\pi/2$ .

Notions métier et théorèmes pour modéliser

**Zone iii)** Si  $f = f_c$  Alors on se situe à la fréquence de coupure de la fonction de transfert, qui s'écrit :

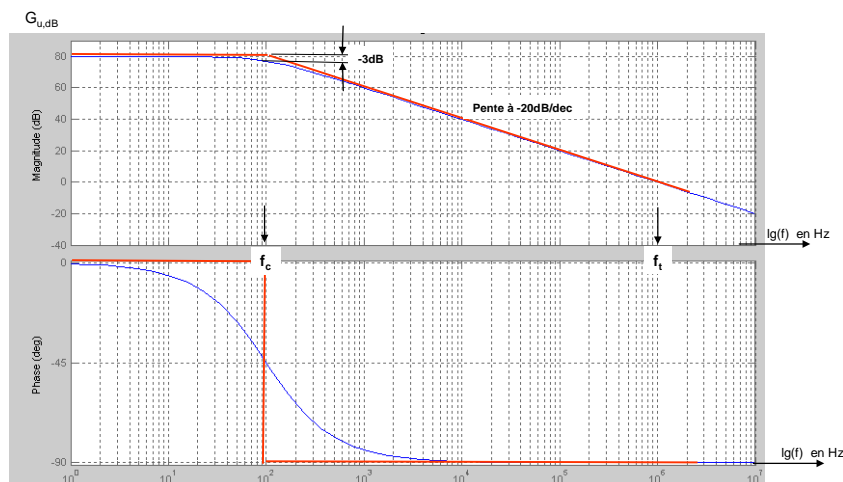
$$\underline{T}(f_c) = \frac{T_0}{1+j}$$

■ soit une valeur de module et d'argument:

$$|\underline{T}(f_c)|_{u,dB} = 20\lg(T_0) - 20\lg(\sqrt{2}) = G_{u,dB} - 3dB$$

$$\text{Arg}(\underline{T}(f_c)) = -\frac{\pi}{4}$$

Notons sur le graphe suivant la différence entre le tracé exact et le tracé asymptotique, qui reste très exploitable en dehors de la zone de la fréquence. Dans cette zone de forte variation de comportement du système, on calculera systématiquement les valeurs module et argument..



#### 1.4 Fréquences caractéristiques du tracé dans le plan de Bode et « bande passante à -3dB ».

Deux fréquences sont particulièrement riches en information :

1) La « **fréquence de coupure** » **«  $f_c$  à -3dB »** de l'amplificateur symbolise la rupture dans la courbe de gain et de phase. Définie par  $f_c = 1/(2\pi\tau_c)$  elle délimite la limite supérieure de la « bande passante à -3dB » de l'amplificateur, la limite inférieure étant 0 hertz pour les amplificateurs opérationnels que l'on appelle également, de ce fait, amplificateurs continus (pouvant amplifier des variations de très basses fréquences). Ainsi dans la bande passante du système, le déphasage entre les signaux d'entrée et de sortie est constant (égal à 0 ou  $\pi$  selon le caractère déphaseur pur introduit par un signe négatif affecté à la fonction de transfert) et tend vers  $-\pi/4$  (ou  $-\pi$ ) pour  $f = f_c$ .

2) La seconde fréquence remarquable est celle pour laquelle le module **exprimé en dB est nul**, ce qui correspond à un module égal à l'unité d'où la frontière entre un fonctionnement du système en mode « amplification » et un fonctionnement en mode « d'atténuation » (respectivement module supérieur à l'unité, puis inférieur). Cette **fréquence de transition**, souvent notée  $f_T$ , (ou donnée par le constructeur sous la forme Gain-Bandwidth Product, ou « Unity Gain ») se situe à l'intersection de l'asymptote à -20dB/dec avec l'axe des abscisses et satisfait à la relation  $f_T = A_0 f_c$

#### 1.5 Généralisation à des fonctions de transfert d'ordre $n$

Avec « l'habitude » le tracé asymptotique d'une fonction sera quasi immédiat dès lors que la fonction de transfert sera exprimée sous la forme de fonctions dont le terme réel est normé :

Fonction de Transfert & Diagramme de Bode

$$\underline{C}(f) = C_0 \frac{\left[ j \frac{f}{f_{z1}} \right] \dots \left[ j \frac{f}{f_{zp}} \right] \left[ 1 + j \frac{f}{f_{z(p+1)}} \right] \dots \left[ 1 + j \frac{f}{f_{z(p+m)}} \right]}{\left[ j \frac{f}{f_{p1}} \right] \dots \left[ j \frac{f}{f_{pf}} \right] \left[ 1 + j \frac{f}{f_{p(f+1)}} \right] \dots \left[ 1 + j \frac{f}{f_{p(f+k)}} \right]}$$

De la propriété de la fonction logarithme où :  $\lg(bp) = \lg b + \lg p$  ; et  $\lg(b/p) = \lg(b) - \lg(p)$ , la représentation dans le plan de BODE de cette fonction - produit de fonctions unitaires-, se traduira sous la forme de la somme des tracés de chaque fonction élémentaire.