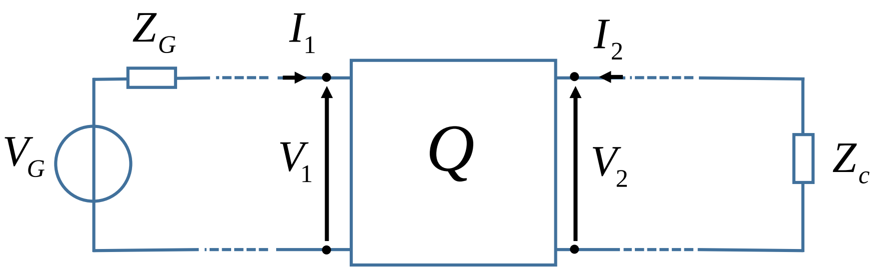
FISA AE 3A

Quadripôles et Fonctions de transfert

Quadripôles et Fonctions de transfert

I. Introduction

C'est à l'ingénieur et mathématicien Franz BREISIG (1868 – 1934) que les premières études sur la théorie des quadripôles furent établies par une représentation de réseaux possédant deux paires de pôles (bornes de connexions). Une paire située à l'entrée du quadripôle et une seconde paire localisée à sa sortie. Pour aborder l'étude des quadripôles par la théorie des lois de Gustav Robert KIRCHHOFF (1824– 1887), les grandeurs électriques utilisées sont les suivantes : tension et courant d'entrée notés V_1 et I_1 puis un second couple noté V_2 et I_2 pour représenter la sortie.



Par convention (celle des électroniciens) les courants d'entrée/sortie, respectivement I_1 et I_2, sont rentrants et considérés « POSITIF ». Lorsque les éléments constitutifs du réseau sont de type R, L, ou C (dipôles passifs), le quadripôle est qualifié de « Quadripôle Passif » par opposition au « Quadripôles Actif » qui nécessite une source d'énergie externe (alimentation, circuit de polarisation) pour permettre son fonctionnement (ex : modèle équivalent d'un amplificateur opérationnel ou d'un transistor en régime dynamique). Enfin, le quadripôle est qualifié de linéaire si les relations mathématiques entre les éléments constitutifs du quadripôle sont régit par un système d'équations différentielles linéaires.

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons à l'étude des quadripôles passifs linéaires et plus particulièrement à l'étude des ***fonctions de transfert***, mais pas seulement puisque cette représentation permet aussi de déterminer les ***impédances d'entrée et de sortie*** d'un circuit (réseau). Cette étude s'appuiera sur une représentation matricielle de fonction de transfert particulière que l'on qualifiera de « directe » ou « d'inverse ».

II. Matrice de transfert « directe », notée Q :

Dans cette matrice de transfert, les grandeurs de sorties V_2 et I_2 sont exprimées en fonction des grandeurs d'entrées V_1, I_1 et des éléments de Q. Les équations qui régissent cette matrice de transfert s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = Q_{11}V_1 - Q_{12}I_1$$

$$I_2 = Q_{21}V_1 - Q_{22}I_1$$

A noter que la désignation de « directe » est purement mnémotechnique par opposition à la matrice de transfert inverse (présentée ci-après) où les grandeurs d'entrées sont fonction des grandeurs de sortie.

III. Matrice de transfert inverse, notée Q^* :

Dans la matrice de transfert inverse, ce sont les grandeurs d'entrées V_1 et I_1 qui sont exprimées en fonction des grandeurs de sorties V_2, I_2 et des éléments de Q^*, d'où le qualificatif « inverse ».

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^*_{11} & Q^*_{12} \\ Q^*_{21} & Q^*_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = Q^*_{11}V_2 - Q^*_{12}I_2$$

$$I_1 = Q^*_{21}V_2 - Q^*_{22}I_2$$

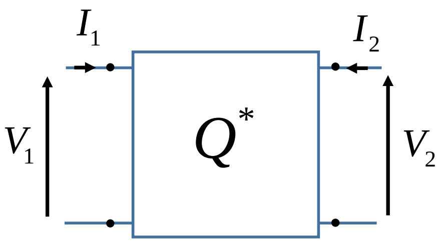
- **Interprétations des éléments de Q^***

Dans cette représentation matricielle les éléments (coefficients) de la matrice Q^* permettent de déterminer :

- la fonction de transfert,
- l'impédance d'entrée,
- l'impédance de sortie.

FISA AE 3A

Quadripôles et Fonctions de transfert



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & Q^* & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[Q^*\right] = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* \\ Q_{21}^* & Q_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$V_1 = Q_{11}^* V_2 - Q_{12}^* I_2 \qquad (1)$$

$$I_1 = Q_{21}^* V_2 - Q_{22}^* I_2 \qquad (2)$$

- Lorsque $I_2 = 0$

(1) $\rightarrow$ $\left.\dfrac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0} = \dfrac{1}{Q_{11}^*}$

${Q_{11}^*}^{-1}$ donne la **<u>fonction de transfert.</u>**

(1) et (2) $\rightarrow$ $\begin{aligned} V_1 &= Q_{11}^* V_2 \\ I_1 &= Q_{21}^* V_2 \end{aligned}$ dès lors, $\left.\dfrac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \dfrac{Q_{11}^*}{Q_{21}^*}$ donne l'**<u>impédance d'entrée</u>**.

- Lorsque $I_1 = 0$

(2) $\rightarrow$ $Q_{21}^* V_2 = Q_{22}^* I_2$ dès lors, $\left.\dfrac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \dfrac{Q_{22}^*}{Q_{21}^*}$ donne l'**<u>impédance de sortie</u>**.

En résumé :

Fonction de transfert : $T(p) = \left.\dfrac{V_s(p)}{V_e(p)}\right| = \dfrac{1}{Q_{11}^*}$

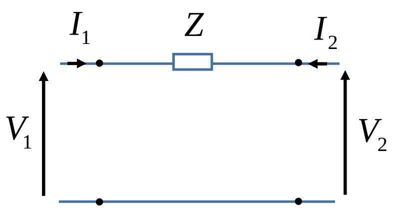
Impédance d'entrée : $Z_e(p) = \left.\dfrac{V_s(p)}{I_e(p)}\right| = \dfrac{Q_{11}^*}{Q_{21}^*}$

Impédance de sortie : $Z_s(p) = \left.\dfrac{V_s(p)}{I_s(p)}\right| = \dfrac{Q_{22}^*}{Q_{21}^*}$

IV. Représentation de deux Quadripôles fondamentaux : impédances série et parallèle

Ces deux types de quadripôle présentent la particularité de ne contenir qu'une seule impédance, soit en série ou bien en parallèle. Ils sont à la base d'une décomposition de circuits électroniques complexes en un sous ensemble de quadripôles élémentaires.

- ***Cas du Quadripôle Série***



La loi de mailles donne :

$$V_2 = V_1 - Z.I_1 \quad avec \ I_2 = -I_1$$

Dans le cas des deux matrices de transfert, les écritures matricielles donnent :

1) Matrice de transfert

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = V_1 - Z.I_1 \quad (1)$$

$$I_2 = -I_1 \quad (2)$$

2) Matrice de transfert inverse

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = V_2 - Z.I_2 \quad (3)$$

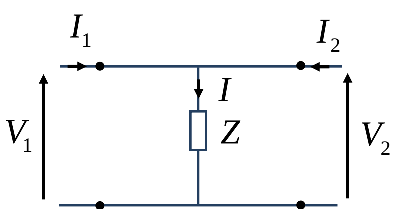
$$I_1 = -I_2 \quad (4)$$

$$(1) \rightarrow V_1 = V_2 + Z.I_1 = V_2 - Z.I_2 = (3)$$

$$(3) \rightarrow V_2 = V_1 + Z.I_2 = V_1 - Z.I_1 = (1)$$

L'écriture matricielle de Q série est identique pour les 2 types de matrice.

- ***Cas du Quadripôle Parallèle***



La loi de mailles donne :

$$V_2 = V_1 \, et \ I_1 + I_2 = I$$

$$I_2 = I - I_2 \, avec \ I = \frac{V_1}{Z}$$

$$soit : \ I_2 = \frac{V_1}{Z} - I_1$$

Dans le cas des deux matrices de transfert, les écritures matricielles donnent :

1) Matrice de transfert

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

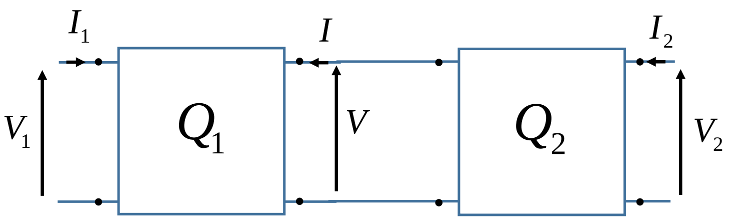
2) Matrice de transfert inverse

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

- Bilan : Qu'il s'agisse de matrice de transfert « directe » ou inverse, les écritures matricielles de Q et Q^* sont identiques dans la représentation d'un quadripôle série ou parallèle.

V. Règle d'association de quadripôles en cascade (chaîne) :

La figure ci-dessous illustre la mise en cascade (chaînage) de deux quadripôles. A ne pas confondre avec la mise en série des quadripôles, non traitée dans le cadre de ce cours.



On notera que le sens réel du courant I en sortie du quadripôle Q_1 est à l'opposé du courant d'entrée dans le quadripôle Q_2.

- **Matrice de transfert :** V_2 et I_2 sont exprimées en fonction de V_1, I_1 et Q_1.

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = [Q_1] \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Q_2] \begin{bmatrix} V \\ +I_1 \end{bmatrix}$$

↖ Signe $+$ en raison de la convention

Donc :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Q_2] \overbrace{[Q_1] \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}}$$

Le produit des matrices de transfert cascadées des quadripôles $Q_2 \times Q_1$ permet de calculer la matrice de transfert du quadripôle équivalant notée Q_{c21}.

Attention, le produit matriciel n'est pas commutatif !!! $[Q_{c21}] \neq [Q_{c12}]$

FISA AE 3A

Quadripôles et Fonctions de transfert

Ainsi l'écriture matricielle du quadripôle équivalant Q_{c21} en fonction des grandeurs électrique (entrée/sortie) s'écrit :

$$\begin{bmatrix}V_2\\I_2\end{bmatrix}=[Q_{c21}]\begin{bmatrix}V_1\\-I_1\end{bmatrix}$$

En généralisant ce résultat pour une matrice de transfert (directe), la matrice d'un quadripôle équivalant $[Q_{cji}]$ s'obtient par le produit matriciel d'un quadripôle $[Q_j]$ cascadé en sortie d'un quadripôle $[Q_i]$.

- **Matrice de transfert inverse :** V_1 et I_1 sont exprimées en fonction de V_2, I_2 et Q^*.

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=[Q_1^*]\begin{bmatrix}V\\-I\end{bmatrix}\text{ et }\begin{bmatrix}V\\-I_1\end{bmatrix}=[Q_2^*]\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix}$$

↖ Signe $-$ en raison de la convention

Donc :

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=[Q_1^*]\overbrace{[Q_2^*]\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix}V\\-I\end{bmatrix}}$$

Le produit des matrices de transfert inverse cascadées des quadripôles $Q_1\times Q_2$ permet de calculer la matrice de transfert du quadripôle équivalant notée Q_{c12}.

Attention, le produit matriciel n'est pas commutatif !!! $[Q_{c12}^*]\neq[Q_{c21}^*]$

L'écriture matricielle du quadripôle équivalant Q_{c12} en fonction des grandeurs électrique (entrée/sortie) s'écrit :

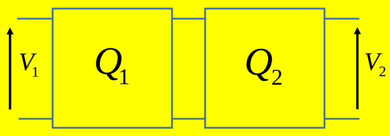
$$\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=[Q_{c12}^*]\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix}$$

En généralisant ce résultat pour une matrice de transfert inverse, la matrice d'un quadripôle équivalant $[Q_{cij}]$ s'obtient par un produit matriciel d'un quadripôle $[Q_j]$ cascadé en sortie d'un quadripôle $[Q_i]$.

- **Bilan : Attention à l'ordre du produit matriciel**

Fonction de transfert (directe) $\Rightarrow [Q_{c21}]$ et non $\cancel{[Q_{c12}]}$

Fonction de transfert inverse $\Rightarrow [Q_{c12}^*]$ et non $\cancel{[Q_{c21}^*]}$

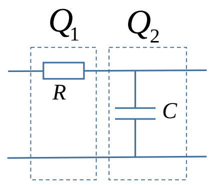


FISA AE 3A

Quadripôles et Fonctions de transfert

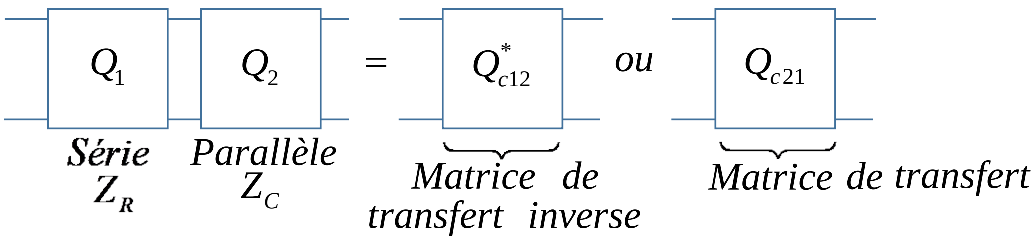
VI. Application des règles d'association en cascade au circuit *RC* (Filtre passe bas)

Soit le filtre passif de type passe bas et d'ordre 1 représenté sur la figure ci-après. Le quadripôle Q_1 est associé à la résistance R alors que le quadripôle Q_2 est associé au condensateur C.



Filtre passif de type passe bas d'ordre un.

D'après la topologie du circuit, les quadripôles Q_1 et Q_2 sont respectivement de type série parallèle. Sur la base de ces deux quadripôles élémentaires, il découle les écritures matricielles équivalentes des matrices de transferts inverse Q^*_{c12} et directe Q_{c21}.



En s'appuyant sur les écritures matricielles associées à la résistance R et au condensateur C, les matrices équivalentes de transfert inverse et directe, s'écrivent :

- **Matrice de transfert inverse équivalente $\left[Q^*_{c12}\right]$:**

$$\left[Q^*_{c12}\right] = \begin{bmatrix} 1 & Z_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z_c^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Cp & 1 \end{bmatrix}$$

Soit,

$$\left[Q^*_{c12}\right] = \begin{bmatrix} 1+RCp & R \\ Cp & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matrice de transfert (directe)** : (calcul plus long pour établir l'expression de la fonction de transfert…)

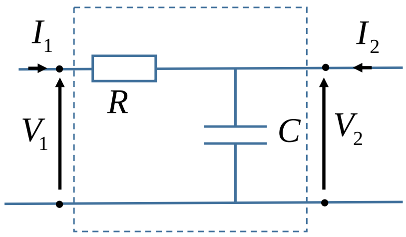
$$[Q_{c21}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z_c^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Cp & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit,

$$[Q_{c21}] = \begin{bmatrix} 1 & R \\ Cp & RCp+1 \end{bmatrix}$$

VII. Utilisation de la matrice de transfert inverse : cas du circuit *RC* (Filtre passe bas) pour déterminer la fonction de transfert du circuit, et ses impédances d'entrée/sortie

Soit la matrice inverse équivalente $\left[Q^*_{c12}\right]$ représentative du circuit RC.



$$\Rightarrow \quad Q^*_{c12} = \begin{bmatrix} 1+RCp & R \\ Cp & 1 \end{bmatrix}$$

S'agissant de la matrice de transfert inverse, on rappelle que ce sont les grandeurs d'entrées V_1 et I_1 qui sont exprimées en fonction des grandeurs de sorties V_2, I_2 et des éléments de Q^*_{c12}, soit :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^*_{11} & Q^*_{12} \\ Q^*_{21} & Q^*_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

C'est donc à partir des éléments Q^*_{11}, Q^*_{21} et Q^*_{22} de la matrices $\left[Q^*_{c12}\right]$ que l'on détermine :

- **La fonction de transfert du circuit :**

$$T(p) = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0} = \left.\frac{V_s(p)}{V_e(p)}\right|_{I_s=0} = \frac{1}{Q^*_{11}} = \frac{1}{1+RCp}$$

$$T(p) = \frac{1}{1+RCp}$$

FISA AE 3A

Quadripôles et Fonctions de transfert

- **L'impédance d'entrée du circuit :**

$$Z_e(p) = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \left.\frac{V_e(p)}{I_e(p)}\right|_{Is=0} = \frac{Q^*_{11}}{Q^*_{21}} = \frac{1+RCp}{Cp} = R + \frac{1}{Cp} = Z_R + Z_c$$

$$Z_e(p) = Z_R + Z_c = R + \frac{1}{Cp}$$

- **L'impédance sortie du circuit :**

$$Z_s(p) = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{V_s(p)}{I_s(p)}\right|_{I_e=0} = \frac{Q^*_{22}}{Q^*_{21}} = \frac{1}{Cp} = Z_c$$

$$Z_s(p) = Z_c = \frac{1}{Cp}$$