Cas des fonctions de transfert de second ordre et régime temporel

I. ORDRE DEUX EN REGIME TEMPOREL (TRANSFORMEE DE LAPLACE)

Toute fonction de transfert peut *presque toujours* s'exprimer sous la forme suivante dès lors que les racines du numérateur et du dénominateur sont réelles :

$$T(p) = T_0 \frac{\left[\tau_{z_1} p\right] \ldots \left[\tau_{z_2} p\right] \left[1+\tau_{z_k} p\right] \ldots \left[1+\tau_{z_{k+m+1}} p\right]}{\left[\tau_{c_1} p\right] \ldots \left[\tau_{c_2} p\right] \left[1+\tau_{c_k} p\right] \ldots \left[1+\tau_{c_{k+m+1}} p\right]}$$

Reste donc en suspens le cas de racines complexes que nous proposons d'étudier dans le cas d'une fonction de transfert d'ordre deux, avec comme exemple la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre deux défini par l'expression :

$$\boxed{T(p) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2m\omega_n p + p^2} \qquad ou \qquad T(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{m}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}}$$

Où m et ω_n sont des constantes que nous baptiserons respectivement :

- ✓ ω_n pour la pulsation naturelle (d'où l'indice n)
- ✓ m : coefficient ou facteur d'amortissement.

La réponse à un échelon de tension d'amplitude E est définie par la relation :

$$U_s(p) = T(p)\frac{E}{p} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2m\omega_n p + p^2}\frac{E}{p}$$

Il est donc nécessaire de chercher les racines du polynôme d'ordre deux, racines qui vont être conditionnées par la valeur de m comparée à 1 puisqu'on a le discriminant:

$$\Delta = \left(2m\omega_n\right)^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2\left(m^2 - 1\right)$$

Ainsi, selon le signe du déterminant, on peut identifier le type de racines p_1 et p_2:

- ✓ **m>1, les deux racines sont réelles NEGATIVES,**
- ✓ **m=1 on a une seule racine double puisque le polynôme s'exprime comme un carré parfait,**
- ✓ **m<1, les racines sont complexes conjuguées.**

VI.1 Facteur d'amortissement supérieur à 1

Les deux racines réelles négatives sont définies par la relation :

$$p_1 = -m\omega_n + \omega_n\sqrt{\left(m^2 - 1\right)} \qquad p_2 = -m\omega_n - \omega_n\sqrt{\left(m^2 - 1\right)}$$

ce qui permet de factoriser l'expression de la tension de sortie :

$$U_s(p) = \frac{E\omega_n^2}{p\left(\omega_n^2 + 2m\omega_n p + p^2\right)} = \frac{E\omega_n^2}{p\left(p - p_1\right)\left(p - p_2\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - p_1} + \frac{C}{p - p_2}$$

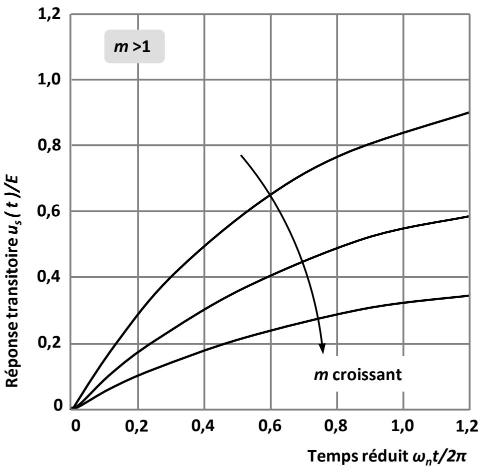
$$U_s(p) = \frac{E}{p} + \frac{E\omega_n}{2\sqrt{m^2 - 1}}\left[\frac{1}{p_1\left(p - p_1\right)} - \frac{1}{p_2\left(p - p_2\right)}\right]$$

soit dans l'espace du temps, pour t>0 où les racines p_1 et p_2 sont réelles négatives:

$$u_s(t) = E + \frac{E\omega_n}{2\sqrt{m^2 - 1}}\left[\frac{1}{p_1}\exp\left(p_1 t\right) - \frac{1}{p_2}\exp\left(p_2 t\right)\right]$$

Ainsi en définissant les constantes de temps $\tau_1 = -1/p_1$ et $\tau_2 = -1/p_2$ on retrouve une forme connue où $\tau_1 > \tau_2$:

$$u_s(t) = E + \frac{E\omega_n}{2\sqrt{m^2 - 1}}\left[\tau_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) - \tau_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right]$$



VI.2 Facteur d'amortissement égal à 1

Lorsque le facteur d'amortissement est égal à 1, le dénominateur s'écrit :

$$1+2\frac{m}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2=1+\frac{2}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2=\left(1+\frac{p}{\omega_n}\right)^2$$

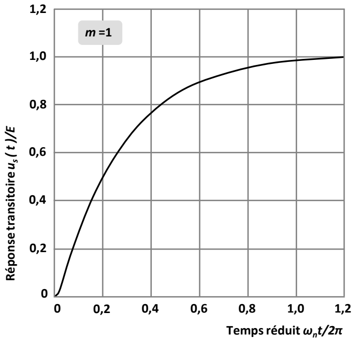
Ce qui fait apparaître une racine double, soit $p_1=p_2=p_0=-1/\omega_n$.
Dès lors l'expression dans l'espace de Laplace de la tension de sortie devient :

$$U_s(p)=\frac{E\omega_n^2}{p\left(\omega_n^2+2\omega_n p+p^2\right)}=\frac{E\omega_n^2}{p\left(p+\omega_n\right)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+\omega_n}+\frac{C}{\left(p+\omega_n\right)^2}$$

$$U_s(p)=\frac{E}{p}-\frac{E}{p+\omega_n}-\frac{E\omega_n}{\left(p+\omega_n\right)^2}$$

Soit en régime temporel, pout t>0 :

$$u_s(t)=E-E\left[1+\omega_n t\right]\exp\left(-\omega_n t\right)$$



VI.3 Facteur d'amortissement inférieur à 1

Les racines vont donc être complexes conjuguées, ce qui pose un problème si on se risquait à identifier ces racines avec des fréquences de coupure ou des constantes de temps !
Voyons comment procéder afin d'être en mesure d'appliquer directement par la suite les résultats démontrés ci-après. Les racines p_1 et p_2, complexes conjuguées sont définies par :

$$p_1=-m\omega_n+j\omega_n\sqrt{\left(1-m^2\right)} \qquad p_2=-m\omega_n-j\omega_n\sqrt{\left(1-m^2\right)}$$

D'où l'expression de la tension de sortie :

$$U_s(p)=\frac{E\omega_n^2}{p\left(\omega_n^2+2m\omega_n p+p^2\right)}=\frac{E\omega_n^2}{p\left[\left(p+m\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-m^2}\right)^2\right]}$$

$$U_s(p)==\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{\left(p+m\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-m^2}\right)^2}$$ ce qui se met sous la forme :

$$U_s(p)=\frac{E}{p}-\frac{Ep+2Em\omega_n}{\left(p+m\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-m^2}\right)^2}=\frac{E}{p}-\frac{E\left(p+m\omega_n\right)+Em\omega_n}{\left(p+m\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-m^2}\right)^2}$$

$$U_s(p)=\frac{E}{p}-\frac{E\left(p+m\omega_n\right)}{\left(p+m\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-m^2}\right)^2}-\frac{Em}{\sqrt{1-m^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-m^2}}{\left(p+m\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-m^2}\right)^2}$$

Soit dans l'espace du temps, pour t>0 :

$$u_s(t)=E-\left\{E\cos\left[\omega_n\left(\sqrt{1-m^2}\right)t\right]-\frac{Em}{\sqrt{1-m^2}}\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-m^2}\right)t\right]\right\}\exp\left(-m\omega_n t\right)$$ en effectuant le changement de variable :

$\cos\theta = m \qquad \sin\theta = \sqrt{1-m^2} \qquad \tan\theta = \dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

Soit :

$$\theta = Arctg\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$$

L'expression temporelle du signal de sortie devient :

$$u_s(t) = E - \frac{E}{\sqrt{1-m^2}}\exp(-m\omega_n t)\left\{\sqrt{1-m^2}\cos\left[\omega_n\left(\sqrt{1-m^2}\right)t\right] + m\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-m^2}\right)t\right]\right\}$$

$$u_s(t) = E - \frac{E}{\sqrt{1-m^2}}\exp(-m\omega_n t)\left\{\sin\theta\cos\left[\omega_n\left(\sqrt{1-m^2}\right)t\right] + \cos\theta\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-m^2}\right)t\right]\right\}$$ en définissant ω_o

$$u_s(t) = E - \frac{E}{\sqrt{1-m^2}}\exp(-m\omega_n t)\left\{\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-m^2}\right)t + \theta\right]\right\}$$

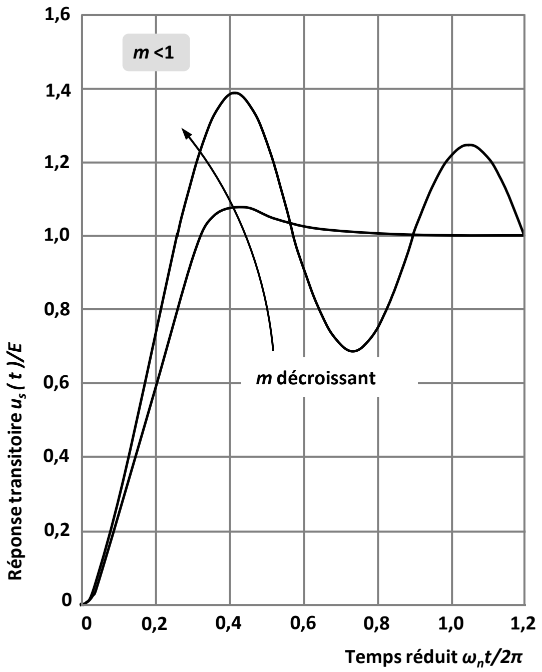
pulsation d'oscillation, on obtient l'expression :

$$u_s(t) = E - \frac{E}{\sqrt{1-m^2}}\exp(-m\omega_n t)\sin\left[\omega_0 t + \theta\right]$$

avec

$$\omega_0 = \omega_n\left(\sqrt{1-m^2}\right)$$

La réponse du filtre passe-bas d'ordre 2 avec m<1, présente un régime transitoire oscillatoire amorti par une exponentielle. L'oscillation s'effectue à la pulsation ω_0, inférieure à la pulsation naturelle ω_n, et l'on qualifie ω_0 de pulsation propre amortie.



Au-delà de la pure représentation oscillatoire baptisée phénomène de résonance, il faut imaginer la conséquence désastreuse qu'une telle réponse à un échelon pourrait entrainer sur un système réel mécanique ; citons hélas la catastrophe d'Angers du 16 Avril 1850 avec la destruction du pont de "Basse Chaîne" qui enjambe la Maine près du château du Roi René ; où le passage du régiment du 11ième Léger au pas cadencé conduit à la destruction de l'ouvrage qui entra en résonance.

Extrait du manuel TTA destiné au cadre de combat :
"… Le franchissement de certains ponts (ponts suspendus, ponts de bateaux, ponts de chemin de fer) exige des précautions spéciales. Si aucun élément n'est en place pour régler la circulation, le chef du détachement d'éclairage reconnaît l'ouvrage, des consignes particulières de traversée sont établies. **Il est interdit de marcher au pas cadencé**. En cas de besoin, un orienteur est placé à l'entrée du pont..."

VI.4 Temps de réponse pour un facteur d'amortissement inférieur à 1

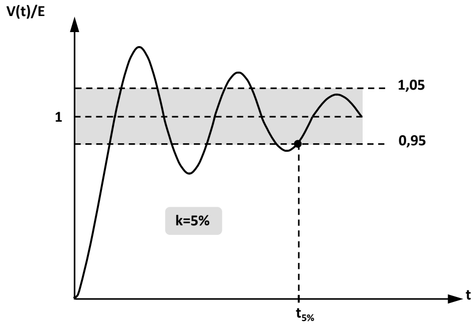
On peut estimer la durée de disparition de ces oscillations en calculant le temps mis pour que la réponse à un échelon de tension soit comprise entre 95% et 105% du régime permanent. On définit ainsi le temps de réponse à 5% par la relation :

$$0.95E < u_s(t_{5\%}) < 1.05E$$

Ce qui s'écrit en effectuant l'approximation qui consiste à considérer que la fonction sinus est à son maximum :

$$\exp\left(-m\omega_n t_{5\%}\right) < 0,05\sqrt{1-m^2}$$

$$t_{5\%} > \frac{\ln\left(20\sqrt{1-m^2}\right)}{m\omega_n}$$



Plus m diminue et plus la réponse est oscillante : on peut donc linéariser l'expression précédente en considérant $m^2<<1$, et ln20=3, d'où l'expression linéaire du temps de réponse à 5% :

$$t_{5\%} = \frac{3}{m\omega_n}$$

Expression qui peut se généraliser pour un temps de réponse à k% :

$$t_{k\%} \cong \frac{\ln\left(\frac{100}{k}\right)}{m\omega_n}$$