Fonctions de transfert de second ordre et régime fréquentiel

I. ORDRE DEUX EN REGIME FREQUENTIEL

Considérons l'exemple d'une fonction de transfert d'ordre deux, où :

- m et ω_n sont des constantes que nous baptiserons respectivement coefficient d'amortissement et pulsation naturelle :

$$T(\omega) = T_0 \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + j2m\omega_n\omega - \omega^2}$$

$$T(\omega) = \frac{T_0}{1 + 2j\dfrac{m}{\omega_n}\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{T_0}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_n}}$$

$$avec \qquad \omega = 2\pi f$$

V.1 Cas où m supérieur à 1

C'est le cas où il existe deux racines, donc deux fréquences de coupure, donc la possibilité de factoriser le dénominateur et donc de combiner le tracé de deux ordres un.

En identifiant les racines du dénominateur, dans le cas où m>1, cette expression va se mettre sous la forme :

$$T(\omega) = \frac{T_0}{1 + 2j\dfrac{m}{\omega_n}\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{T_0}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)} = \frac{T_0}{1 + j\omega\left(\dfrac{1}{\omega_1} + \dfrac{1}{\omega_2}\right) - \dfrac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}}$$

avec la définition des racines ω_1 et ω_2 :

Soit :

$$\omega_1 = -m\omega_n + \omega_n\sqrt{m^2-1} \qquad \omega_2 = -m\omega_n - \omega_n\sqrt{m^2-1}$$

$$\omega_1\omega_2 = \omega_n^2 \qquad \frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1\omega_2} = \frac{2m}{\omega_n}$$

Le module et l'argument de cette fonction de transfert s'écrit :

$$|T(\omega)| = \frac{T_0}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4m^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\left(4m^2-1\right)+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4}}$$

$$Arg\left[T(\omega)\right] = -Arc\tan\left[\frac{2m\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

Ou plus simplement en appliquant la formule d'Euler :

$$T(\omega) = \frac{T_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\exp(j\theta_1)\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}\exp(j\theta_2)}$$

$$T(\omega) = \frac{T_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}\exp\left[-j\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$$

avec

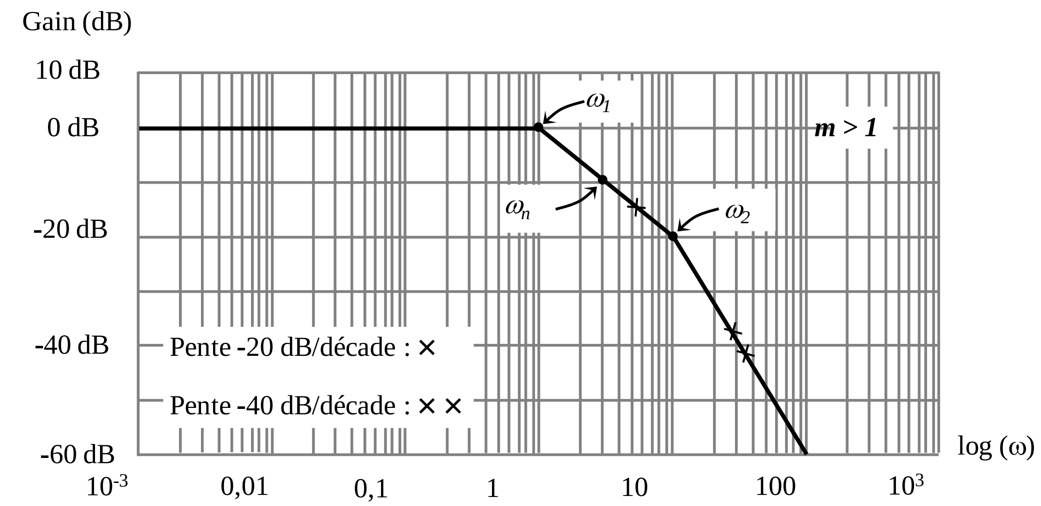
$$\theta_1 = Arc\tan\left[\frac{\omega}{\omega_1}\right] \qquad \theta_2 = Arc\tan\left[\frac{\omega}{\omega_2}\right]$$

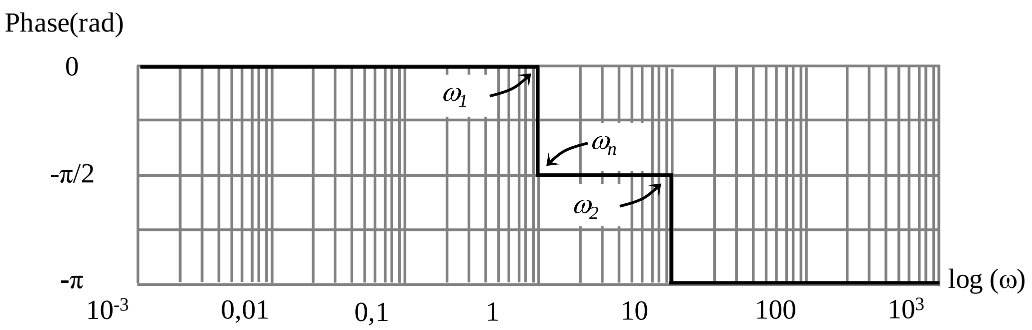
Soit l'expression du module :

$$T(\omega) = \frac{T_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1+\omega^2\left(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\right)+\left(\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}\right)^2}}$$

avec :

$$\omega_1^2+\omega_2^2 = \omega_n^2\left(4m^2-2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1\omega_2 = \omega_n^2$$



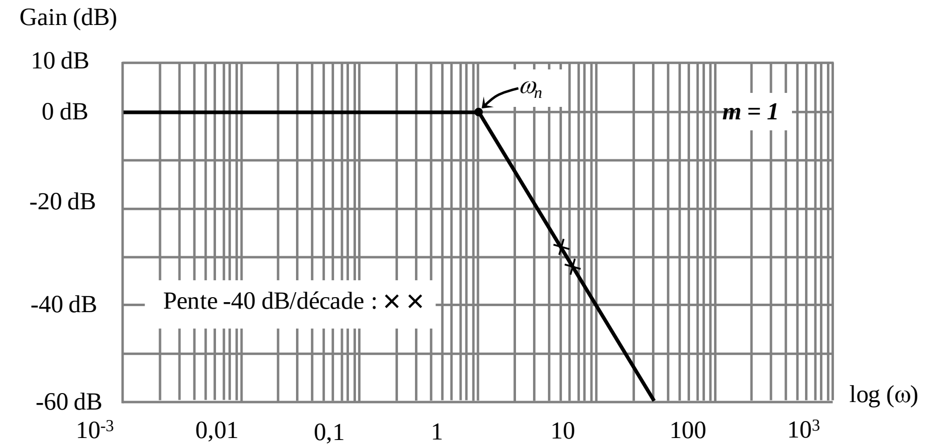


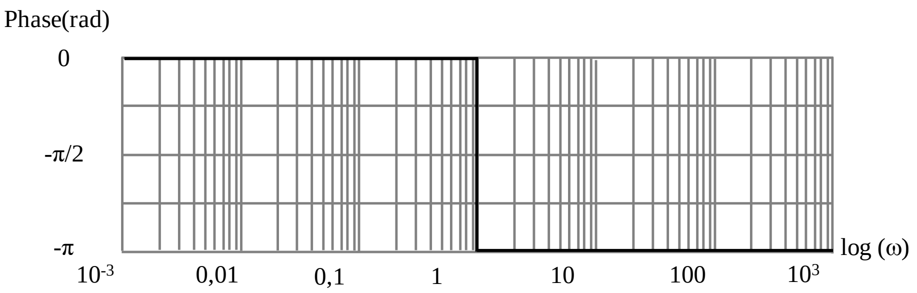
Le tracé dans le plan de Bode résulte de la somme des deux tracés unitaires, où on note que ω_n est située au milieu de ω_1 et ω_2 dans le plan de Bode ce qui est conforme à la relation $\omega_n = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ établie précédemment puisque :

$$\lg(\omega_n) = \frac{1}{2}\left[\lg(\omega_1) + \lg(\omega_2)\right]$$

V.2 Cas où m=1

Les deux racines sont égales, on dit que la même pulsation de coupure (ou fréquence de coupure puisque $\omega = 2\pi f$) est présente deux fois, on parle de fréquence de coupure double qui a la propriété d'atténuer de 6dB puis de définir une pente à -40dB/dec pour les fréquences supérieures.





3.3~ Cas où m<1

Reste donc en suspens le cas où la résolution de l'équation d'ordre deux conduit à l'expression de deux pulsations complexes, pour lesquelles nous nous devons de raccrocher des éléments physiques concrets du tracé de Bode.

Ainsi pour m<1, les racines étant :

$\omega_1 = -m\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-m^2}$ $\qquad\qquad$ $\omega_2 = -m\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-m^2}$

il n'est pas possible de les placer sur l'axe des abscisses du diagramme de Bode.

Revenons à l'expression du module de la fonction de transfert étudiée :

$$T(\omega) = T_0\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + j2m\omega_n\omega - \omega^2} = \frac{T_0}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2jm\frac{\omega}{\omega_n}}$$

Qui peut se mettre sous l'expression réduite, en définissant la variable pulsation réduite $u=\omega/\omega_n$:

$$T(u) = \frac{T_0}{\left(1-u^2\right) + 2jmu} \quad \Rightarrow \quad \left|T(u)\right| = \frac{T_0}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + 4m^2u^2}}$$

Analysons la variation de la fonction module en étudiant le comportement de sa dérivée, et pour simplifier intéressons-nous à l'expression de la dérivée du carré du module :

$$\frac{d\left(\left|T(u)\right|\right)^2}{du} = -T_0 \frac{4u\left(-1+u^2+2m^2\right)}{\left[\left(1-u^2\right)^2+4m^2u^2\right]^2}$$

Expression qui s'annule pour u=0, condition purement mathématique, mais aussi pour la condition:

$$u^2 = \left(1-2m^2\right)$$

soit la condition sur le coefficient d'amortissement m :

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.707$$

Le tracé dans le plan de Bode de cette fonction d'ordre deux va donc dépendre de la valeur de m comparée à $(2)^{-0.5}$.

- ✓ $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$: l'expression de la dérivée du module ne s'annule jamais et reste négative, la fonction module est strictement décroissante.
- ✓ $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'amortissement est faible, et il existe une pulsation pour laquelle l'expression du module de la fonction de transfert est maximale définie par :

  $$u^2 = \left(1-2m^2\right) \quad avec \quad u = \frac{\omega}{\omega_n}$$

On définit ainsi la notion de résonance pour la pulsation ω_r:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2m^2}$$

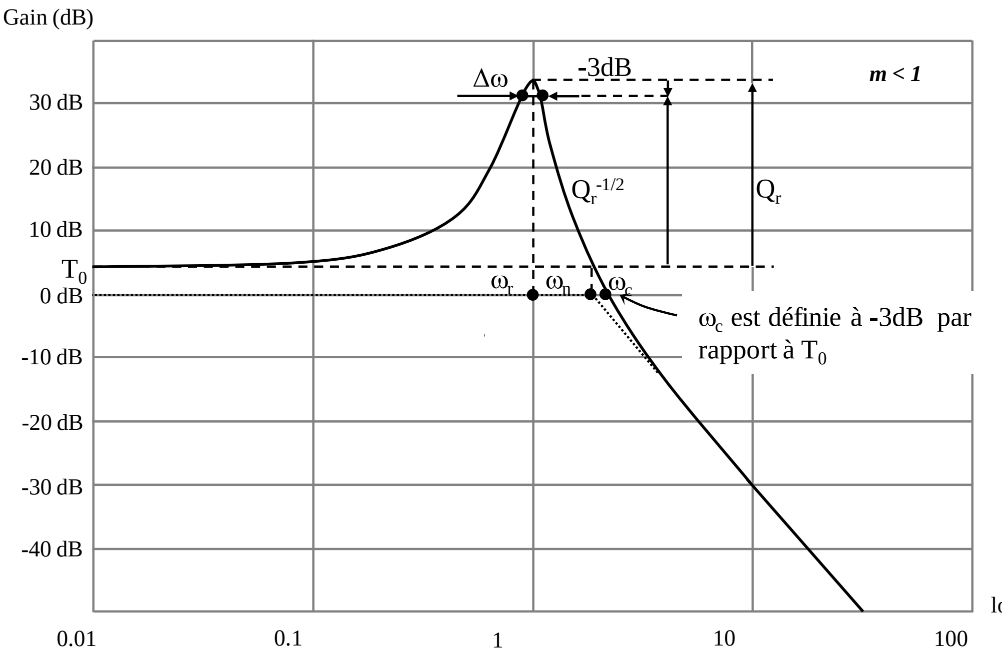
A laquelle on associe la valeur maximale du module :

$$\left|T(u_r)\right| = \frac{T_0}{\sqrt{\left(1-u_r^2\right)^2+4m^2u^2}} \qquad avec \qquad u = u_r = \frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1-2m^2}$$

$$\left|T(u_r)\right| = \frac{T_0}{\sqrt{4m^4+4m^2(1-2m^2)}} = \frac{T_0}{\sqrt{4m^2\left(1-m^2\right)}} = \frac{T_0}{2m\sqrt{\left(1-m^2\right)}}$$

On en déduit l'expression du facteur de résonance ou du coefficient de surtension Q :

$$Q = \frac{\left|T(u_r)\right|}{\left|T(u_0)\right|} = \frac{T_0}{2m\sqrt{\left(1-m^2\right)}}\frac{1}{T_0} = \frac{1}{2m\sqrt{\left(1-m^2\right)}}$$



Remarque : à la constante ω_n, que nous avions appelé pulsation naturelle, l'expression du module s'écrit :

$$|T(1)| = \frac{T_0}{\sqrt{(1-1)^2 + 4m^2}} = \frac{T_0}{2m}$$

La notion de pulsation de coupure ω_c, et de bande passante à -3dB, se déduit de l'expression :

$$|T(u_c)| = \frac{T_0}{\sqrt{(1-u_c^2)^2 + 4m^2u_c^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$$

Soit à résoudre l'équation :

$$(1-u_c^2)^2 + 4m^2u_c^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad u_c^4 + u_c^2(4m-2) - 1 = 0$$