Réponse temporelle pour des signaux quelconques : transformée de Laplace

Mathématicien Français, né le 23 Mars 1749 à Beaumont-en-Auge en Normandie, Pierre Simon Laplace est à l'origine de nombreux travaux sur les équations différentielles, théorie analytique des probabilités, mécanique analytique, mécanique céleste, équation de la chaleur en collaboration avec Lavoisier. Contemporain de d'Alembert, Lagrange, Condorcet, Coulomb, il est élu le 31 Mars 1773, membre de l'Académie des Sciences, et contribuera à la normalisation des poids et mesures. Enseignant dans de nombreux instituts, Ecole Normale, Ecole Polytechnique, il fonde avec le chimiste Berthollet la Société d'Arcueil en 1805 (1805-1813) d'où de nombreuses théories émergeront (Biot, Poisson, Arago, Fresnel, Fourier…). Pour l'anecdote, il occupât le poste de ministre de l'intérieur durant 6 semaines en 1799, avant d'être révoqué par Napoléon. Elevé au rang de marquis en 1817, il s'éteint le 5 mars 1827 à Paris.

Tout système physique évoluant dans le temps peut être décrit par un système d'équations différentielles. La constitution du système d'équations différentielles impose :

- la connaissance structurelle du système,
- la résolution analytique (ou numérique) du système différentiel.

Le calcul **opérationnel** (ou symbolique), permet, grâce à un changement de variable, de remplacer la résolution d'une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, et d'ordre fini, par la résolution d'une équation algébrique.
Utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, le calcul opérationnel est d'une utilisation plus systématique et peut être appliqué à l'étude de systèmes, pour lesquels on ne dispose que de données expérimentales conduisant à l'identification du système, sans nécessairement connaître les équations différentielles.

I. CALCULER DES REPONSES TEMPORELLES QUELCONQUES

A toute fonction du temps $\boldsymbol{f}$**(t)**, vérifiant $\forall t<0$, f(t)=0 et $\forall t>0$ f(t), on peut faire correspondre une fonction **F(p)** ou $\mathrm{L}\left(f(t)\right)$ de la variable complexe p appelée Transformée de Laplace de f(t) définie par :

$$F(p)=\int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Réciproquement, la transformée inverse de Laplace, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\mathrm{F(p)})$, est appelée original de F(p) et définie par la transformation inverse de Melin-Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\xi - j\infty}^{\xi + j\infty} F(a) e^{at} da$$

Remarques :
1) La variable symbolique de Laplace notée « p », est notée « s » par les anglo saxons.
2) Dans le calcul opérationnel par transformée de Laplace, on définit l'origine des temps (t=0) comme l'instant d'apparition du signal qui va être à l'origine du régime transitoire que l'on souhaite déterminer.

Alors qu'il n'est pas chose simple de dériver une fonction quelconque, le calcul opérationnel doit son succès à ses propriétés de dérivation et d'intégration, obtenue respectivement en multipliant par « p » ou en divisant par « p » les transformées de Laplace de la fonction cherchée.

I.1 Cas de la dérivation

	Fonction initiale	Fonction dérivée
Fonction temporelle	f(t)	$f'(t) = \frac{\partial f}{dt}$
Fonction de Laplace	F(p)	$\mathcal{L}\left[(\frac{df}{dt}) \right] = \mathcal{L}\left[f'(t) \right] = pF(p) - f(0^+)$
Si $f(0^+) = 0$, alors on peut assimiler la dérivation à une multiplication par p.		

I.2 Cas de l'intégration

	Fonction initiale	Fonction primitive
Fonction temporelle	f(t)	$\gamma(t)$ définie par $\frac{d\gamma(t)}{dt} = f(t)$
Fonction de Laplace	F(p)	$L[\gamma(t)] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{\gamma(0^+)}{p}$
Si $\gamma(0^+) = 0$, alors on peut assimiler l'intégration à une multiplication par $\frac{1}{p}$.		

I.3 Application à la transformation d'une équation différentielle :

La propriété de dérivation, permet ainsi grâce à un changement de variables, de remplacer une équation différentielle linéaire à coefficients constants par une équation polynomiale :

L'équation : $A_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + A_0 s(t) = B_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + B_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + B_0 e(t)$

S'écrit : $S(p) = \frac{B_m p^m + \ldots + B_0}{A_n p^n + \ldots + A_0} E(p) + \frac{\eta(CI, p)}{A_n p^n + \ldots + A_0}$, avec $\eta(CI, p)$ fonction traduisant les conditions initiales $s(t=0), s^1(t=0), \ldots et \ldots e(t=0), e^1(t=0)$.

On définit :

$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{B_m p^m + \ldots + B_0}{A_n p^n + \ldots + A_0}$ Comme étant la fonction de transfert ou **transmittance symbolique**.

L'opérateur de Laplace est :

- non distributif pour la multiplication : $\mathcal{L}^{-1}\left[F(p).G(p)\right] \neq \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right].\mathcal{L}^{-1}\left[G(p)\right]$;
- **distributif** pour l'addition: $\mathcal{L}^{-1}\left[F(p)+G(p)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[G(p)\right]$;

Aussi il sera nécessaire de transformer un produit de fonctions en somme par le biais d'une décomposition en élément simples.

I.4 Tables de transformées

On lit parfois la remarque suivante résumant la propriété du calcul par transformée de Laplace : « *La transformée de Laplace permet de résoudre par identification avec **des tables de transformées** toute forme d'équation différentielle sous réserve de savoir décomposer en éléments simples une fraction* ».

Fonction	f(t)	F(p)
Somme de fonctions	$\eta f_1(t)+\lambda f_2(t)$	$\eta F_1(p)+\lambda F_2(p)$
Fonction décalée	$f(t-t_1)$	$\exp\left[-t_1 p\right]F(p)$
Fonction dérivée	$\dfrac{df(t)}{dt}$	$pF(p)-f\left(0^+\right)$
Fonction Primitive	$\int f(\xi)d\xi$	$\dfrac{F(p)}{p}+\dfrac{f^{-1}\left(0^+\right)}{p}$
impulsion de Dirac	δ(t) telle que $\int_0^\infty \delta(t)dt = 1$ et $\delta(t)=0\ \ \forall t \neq 0$	1
échelon unité	$u(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t \leq 0 \\ 1 & \forall t > 0^+\end{cases}$	$\dfrac{1}{p}$
Constante	$\alpha \qquad (t>0)$	$\dfrac{\alpha}{p}$
rampe de pente α	$\alpha t \qquad (t>0)$	$\dfrac{\alpha}{p^2}$
fonction sinus	sin(ωt).u(t)	$\dfrac{1}{\omega}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{p^2}{\omega^2}\right)}$
fonction sinus	$\sin\left(\omega t+\theta\right) \qquad (t>0)$	$\dfrac{p\sin\theta+\omega\cos\theta}{p^2+\omega^2}$
fonction cosinus	cos(ωt).u(t)	$\dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{p}{\left(1+\dfrac{p^2}{\omega^2}\right)}$
fonction cosinus	$\cos\left(\omega t+\theta\right) \qquad (t>0)$	$\dfrac{p\cos\theta-\omega\sin\theta}{p^2+\omega^2}$

fonction t^n	$t^n.u(t)$	$n!\dfrac{1}{p^{n+1}}$
fonction exponentielle	$\exp[-\alpha t] \qquad (t>0)$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
fonction exponentielle	$e^{-\frac{t}{T}}\cdot u(t)$	$\dfrac{T}{1+Tp}$
fonction périodique amortie	$Ee^{-\delta t}\cos\omega t \qquad (t>0)$	$\dfrac{p+\delta}{(p+\delta)^2+\omega^2}E$
fonction exponentielle pondérée par t^n	$t\exp[-\alpha t] \qquad (t>0)$	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$
	$t^n\cdot e^{-\frac{t}{T}}\cdot u(t)$	$n!T^{n+1}\dfrac{1}{(1+Tp)^{n+1}}$
fonction sinus pondérée par t^n	$t^n\cdot\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\dfrac{2^n n!}{\omega^{2n+1}}\dfrac{p^n}{\left(1+\dfrac{p^2}{\omega^2}\right)^{n+1}}$
différence de deux fonctions exponentielles	$\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\cdot u(t)$	$\dfrac{(T_1-T_2)}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$
fonction périodique amortie par une exponentielle décroissante	$\left[e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]\cdot u(t)$	$\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega}\dfrac{1}{1+2\zeta\dfrac{p}{\omega}+\dfrac{p^2}{\omega^2}}$
fonction périodique non amortie superposée à un régime transitoire apériodique	$\left(\dfrac{\omega^2T}{1+\omega^2T^2}e^{-\frac{t}{T}}+\dfrac{\omega\sin(\omega t-\varphi)}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\right)\cdot u(t)$ avec $\varphi=\mathrm{Arctg}(\omega T)$	$\dfrac{1}{(1+Tp)\left(1+\dfrac{p^2}{\omega^2}\right)}$

I.5 Un calcul malin…..

Utilisons le résultat de la transformée de Laplace de la fonction exponentielle pour calculer SIMULTANEMENT les transformées de Laplace des fonctions sinus et cosinus à partir de la propriété dans Laplace de la fonction exponentielle….

Considérons la fonction g(t), définie sur l'intervalle $[0^+;\infty[$ par la relation, $g(t)=G\exp[pt]$, où $p=j\omega$.

La propriété de linéarité de l'opérateur de Laplace induit la relation :

$G(p)=L(G\exp[pt])=L(G\exp[j\omega t])=L(G\cos\omega t+jG\sin\omega t)=L(G\cos\omega t)+jL(G\sin\omega t)$,

La fonction image G(p) est donnée par : $G(p)=\dfrac{G}{p-j\omega}=G\dfrac{[p+j\omega]}{p^2+\omega^2}$.

Par identification on obtient les transformées de Laplace des fonctions cosinus et sinus :

$L(\cos\omega t)=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, $L(\sin\omega t)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$