Signaux « classiques » & Transformée de Laplace

Transformées de signaux électriques usuels

a) Signal échelon unitaire (ou fonction de Heaviside)

La transformée de Laplace de la fonction f(t) n'étant définie que dans le cas où t>0, afin de traiter des fonctions indépendantes du temps et de définir l'origine des temps, (par exemple une fonction constante associée à un régime continu) on définit la fonction u(t) :

$$u(t) = \frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn}(t)) \qquad \begin{array}{ll} u(t)=0 & \forall t<0 \\ u(t)=1 & \forall t>0 \end{array}$$

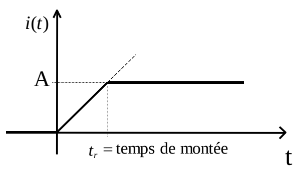
La transformée de Laplace de u(t) est donnée par la relation :

$$U(p) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}$$

<u>*Remarque :*</u> Nombreux sont les mathématiciens ne sachant se mettre d'accord sur la relation u(t=0)=1/2; peu importe la transformée de Laplace étant définie pour $t=0^+$!!!

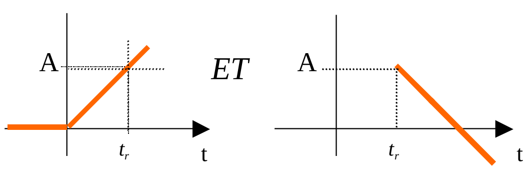
b) Signal échelon avec temps de montée non nul

On considère le signal i(t) défini par un temps de montée t_r, dont l'amplitude varie entre 0 et A :



$i(t)$ est constitué par la superposition :

- ✓ d'un signal type rampe
- ✓ et du même signal retardé et de signe opposé.



d'après la propriété de linéarité et de délai, l'image I(p) est donnée par la relation :

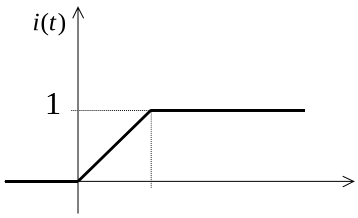
$$I(p) = L\left(\frac{t}{t_r} Au(t)\right) + L\left(-\frac{t}{t_r} Au(t - t_r)\right)$$

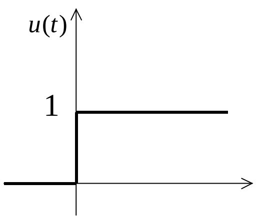
D'où l'expression de la transformée de Laplace du signal échelon « non idéal » avec un temps de montée t_r, et une amplitude A :

$$I(p) = \frac{A}{t_r p^2}(1 - e^{-pt_r})$$

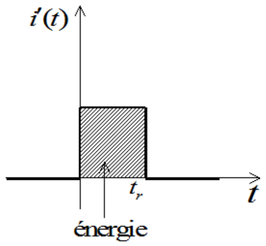
c) Fonction échelon et fonction de Dirac

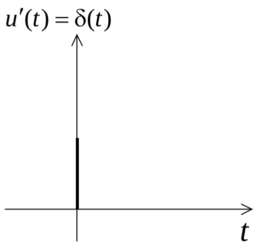
En faisant tendre t_r vers zéro, le signal i(t) se confond avec le signal u(t) associé à la fonction « échelon » .





La dérivée des fonctions i(t) et u(t) est représentée ci-dessous :





la fonction $\delta(t)$ est associé à l'impulsion de Dirac et représente une impulsion de très courte durée, de grande amplitude transportant une énergie finie.

$$L[\delta(t)] = L\left[\frac{du(t)}{dt}\right] = p\frac{1}{p} - u(t=0) = 1$$

On vérifie aussi que :

$$L[i'(t)] = p\frac{1}{t_r p^2}(1 - \exp[-t_r p])$$

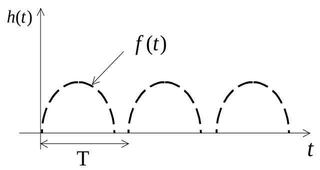
Lorsque t_r vers zéro, le développement limité à l'ordre 1 de la fonction exponentielle induit $\exp[-t_r p] = 1 - t_r p$

D'où :

$$L[i'(t)] \xrightarrow[t_r \to 0]{} \frac{1}{t_r p}[1 - (1 - t_r p)] = 1$$

d) Signal périodique

On considère un signal périodique h(t) défrinie selon :



$$h(t) = f(t) + f(t-T) + ... + f(t-nT) + ...$$

La transformée de Laplace d'un signal f(t) de périodicité T, se déduit d'après la propriété de linéarisation :

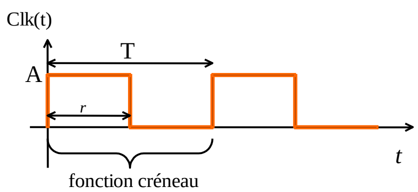
$$L[h(t)] = F(p)(1 + e^{-pT} + ... + e^{-npT} + ...)$$

D'où :

$$L[h(t)] = H(p) = F(p)\frac{1}{1-e^{-pT}}$$

e) Signal d'horloge

Considérons le signal d'horloge Clk(t) avec l'ensemble des paramètres suivants :



Période T,

durée à l'état haut : r

rapport cyclique de l'état haut (« duty cycle » en anglais) : r/T

L'image CLK(p) se déduit de l'approche suivante :

- ✓ *<u>Etape 1 :</u>* Identification de la transformée de Laplace de la fonction créneau $C(p)$.

En appliquant le même raisonnement que pour le cas du signal échelon avec temps de montée non nul, on obtient :

$$C(p) = \frac{A}{p}(1 - e^{-\alpha p})$$

- ✓ *<u>Etape 2 :</u>* Modélisation de la périodicité du signal créneau constituant le signal d'horloge.

$$H(p) = C(p)\frac{1}{1-e^{-pT}} = \frac{A}{p}\frac{1-e^{-\alpha p}}{1-e^{-Tp}}$$

<u>Remarque :</u> Dans le cas où α=T, la fonction horloge devient une fonction échelon, ce que vérifie l'application numérique du résultat précédent puisque H(p)=A/p, ce qui correspond bien à la transformée de Laplace de la fonction échelon.

Principales propriétés de la transformation de Laplace

Définition de base	**f(t)**	$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
Linéarité	**$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$**	**$\alpha F_1(p)+\beta F_2(p)$**
Retard temporel	**$f(t-\tau)$**	$e^{-p\tau}F(p)$
Décalage de la variable symbolique p	**$e^{\alpha t}f(t)$**	**$F(p-\alpha)$**
Changement de t en ωt	**$f(\omega t)$**	$\frac{1}{\omega}F\left(\frac{p}{\omega}\right)$
Multiplication de f(t) par t	**tf(t)**	$-\frac{d}{dp}[F(p)]$
Multiplication de f(t) par t^n	**$t^n f(t)$**	$-(1)^n\frac{d^n}{dp^n}[F(p)]$
Division de f(t) par t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(u)du$
Dérivée première de f(t)	$\frac{df}{dt}$	**$pF(p)-f(0^+)$**
Dérivée $n^{ième}$ de f(t)	$\frac{d^nf}{dt^n}$	**$p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\ldots$ $-\ldots-f^{(n-1)}(0^+)$**
Intégrale première	$f(t)=\int_0^t g(x)dx$	$F(p)=\frac{G(p)}{p}$
Intégrale multiple	$f(t)=\int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t g(x)dx$	$F(p)=\frac{G(p)}{p^n}$
Intégrale de convolution	**$F(t)=f_1(t)*f_2(t)=$** $\int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx$	**$F(p)=F_1(p).F_2(p)$**
Théorème de la valeur initiale		**$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{p\to\propto} pF(p)$**
Théorème de la valeur finale		**$\lim_{t\to\propto} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)$**

Transformées de Laplace de fonctions usuelles en électronique et automatique

Fonction	f(t)	F(p)
impulsion de Dirac	$\delta(t)$ telle que $\int_0^\infty \delta(t)dt = 1$ et $\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$	1
échelon unité	$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ 1 & \forall t > 0^+ \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
rampe de pente unité	$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
fonction sinus	$\sin(\omega t).u(t)$	$\frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(1+\frac{p^2}{\omega^2}\right)}$
fonction cosinus	$\cos(\omega t).u(t)$	$\frac{1}{\omega^2}\frac{p}{\left(1+\frac{p^2}{\omega^2}\right)}$
fonction t^n	$t^n.u(t)$	$n!\frac{1}{p^{n+1}}$
fonction exponentielle	$e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t)$	$\frac{T}{1+Tp}$
fonction exponentielle pondérée par t^n	$t^n \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t)$	$n!T^{n+1}\frac{1}{(1+Tp)^{n+1}}$
fonction sinus pondérée par t^n	$t^n \cdot \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{2^n n!}{\omega^{2n+1}}\frac{p^n}{\left(1+\frac{p^2}{\omega^2}\right)^{n+1}}$
différence de deux fonctions exponentielles	$\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \cdot u(t)$	$\frac{(T_1 - T_2)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$
fonction périodique amortie par une exponentielle décroissante	$\left[e^{-\zeta\omega t} \sin\left(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right] \cdot u(t)$	$\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega}\frac{1}{1+2\zeta\frac{p}{\omega}+\frac{p^2}{\omega^2}}$

fonction périodique non amortie superposée à un régime transitoire apériodique	$\left(\frac{\omega^2 T}{1+\omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{\omega \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\right) \cdot u(t)$ avec $\varphi = \mathrm{Arctg}(\omega T)$	$\frac{1}{(1+Tp)\left(1+\frac{p^2}{\omega^2}\right)}$
réponse oscillatoire amortie du second ordre avec régime transitoire superposé	$\left[\frac{\omega^2 T e^{-\frac{t}{T}}}{1-2\zeta\omega T+\omega^2 T^2} + \frac{\omega e^{-\zeta\omega t} \sin\left(\omega t\sqrt{1-\zeta^2} - \varphi\right)}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-2\zeta\omega T+\omega^2 T^2)}}\right] \times u(t)$ avec $\varphi = \mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega T\sqrt{1-\zeta^2}}{1-\zeta\omega T}\right)$	$\frac{1}{(1+Tp)\left(1+2\zeta\frac{p}{\omega}+\frac{p^2}{\omega^2}\right)}$
régime pseudo-périodique amorti superposé à une valeur constante	$\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \sin\left(\omega t\sqrt{1-\zeta^2} - \varphi\right)\right] \cdot u(t)$ avec $\varphi = \mathrm{Artcg}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$	$\frac{1}{p\left(1+2\zeta\frac{p}{\omega}+\frac{p^2}{\omega^2}\right)}$
somme de trois exponentielles décroissantes	$\left[\frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}}}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} + \frac{T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} + \frac{T_3 e^{-\frac{t}{T_3}}}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}\right] \cdot u(t)$	$\frac{1}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p}$
Somme d'une fonction exponentielle et de sa dérivée	$\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \cdot u(t)$	$\frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}$