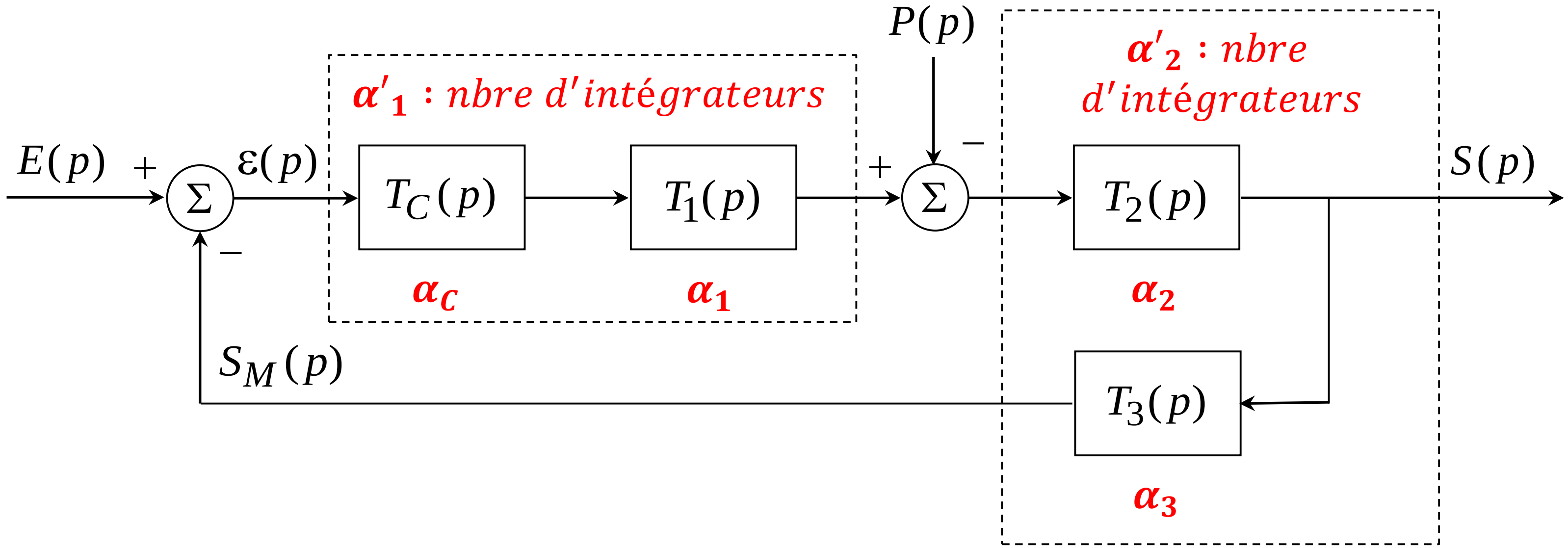
Chapitre 4 : Précision



Ce schéma fait apparaître les fonctions de transfert suivantes :

- Le correcteur $T_C(p)$ à spécifier par le concepteur,
- La partie du système $T_1(p)$, située avant le point d'application de la perturbation (actionneur, ampli…),
- La partie du système $T_2(p).T_3(p)$ située après le point d'application de la perturbation. (procédé $T_2(p)$, capteur $T_3(p)$).

Deux entrées :

- Le signal de **consigne** $E(p)$ (ou entrée principale),
- Le signal de **perturbation** $P(p)$ (ou entrée secondaire).

Définition du signal d’erreur

- On appelle erreur du système asservi, la différence :

$$\boldsymbol{\varepsilon(t) = e(t) - s_M(t)}$$

Cet écart constitue une **mesure de la qualité du système asservi**.

- On se restreindra uniquement à l’étude du **régime permanent** :

$$\boldsymbol{\varepsilon(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p)}$$

- Expression de la fonction de transfert de boucle $\boldsymbol{T_B(p)}$:

$$\boldsymbol{T_B(p) = \left.\frac{S_m(p)}{\varepsilon(p)}\right|_{P(p)=0} = T_C(p).T_1(p).T_2(p).T_3(p)}$$

Détail de l'étude

Cet étude sera faite en tenant compte des diverses configurations possibles :

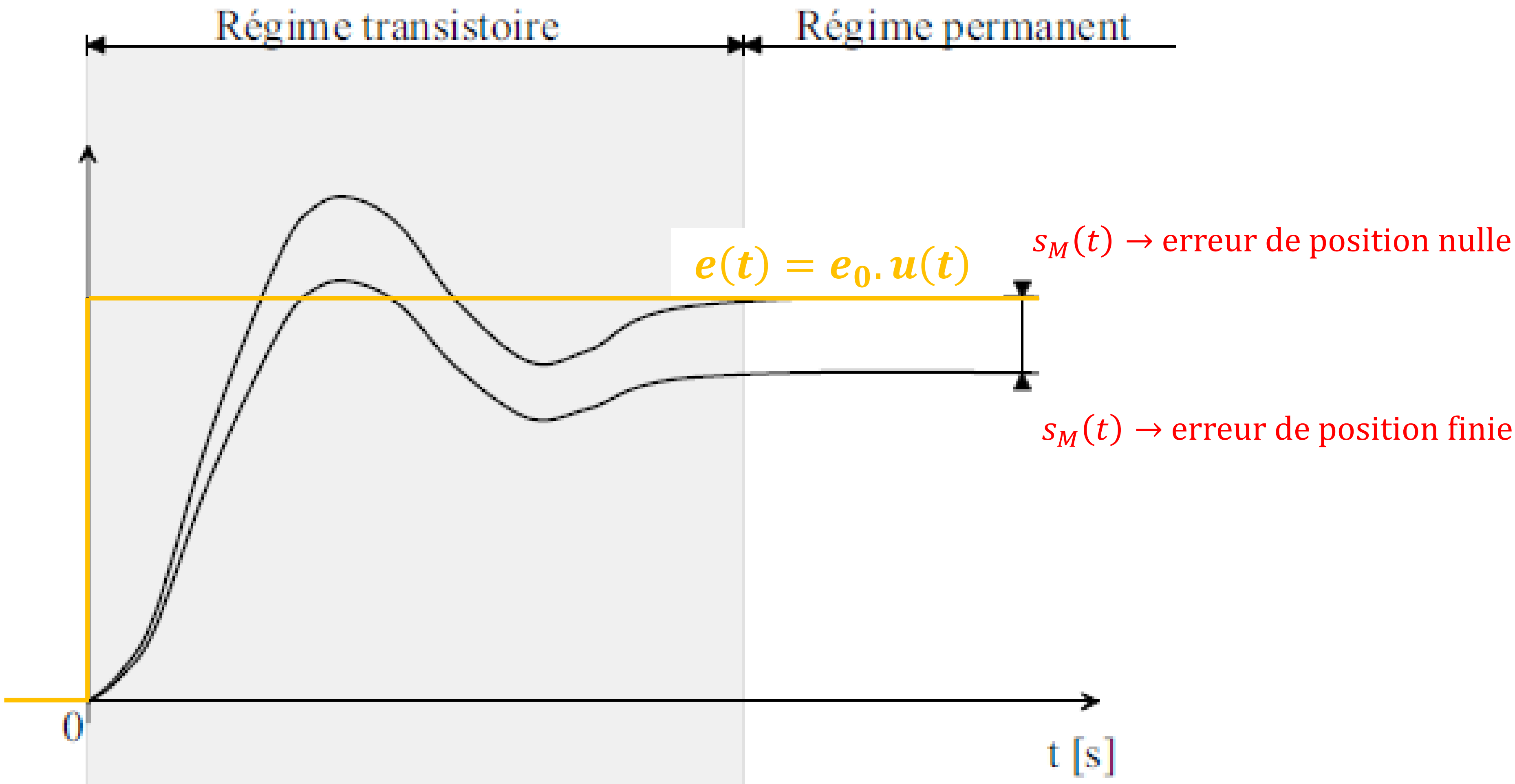
- Le nombre d'intégrateurs dans la fonction de transfert de boucle $T_B(p)$,
- L'emplacement des intégrateurs dans $T_B(p)$,
- La valeur du gain statique de boucle K_B,
- L'influence de la consigne ($E(p)$) et de la perturbation ($P(p)$),
- Le type de signal sur les entrées.

- Afin de faciliter les calculs, les fonctions de transfert seront exprimées sous la forme suivante :

$$T_i(p) = \frac{K_i}{p^{\alpha_i}}.R_i(p) \qquad \text{avec} \qquad R_i(p) = \frac{1 + b_1.p + \cdots + b_m.p^m}{1 + a_1.p + \cdots + a_{n-\alpha_i}.p^{n-\alpha_i}}$$

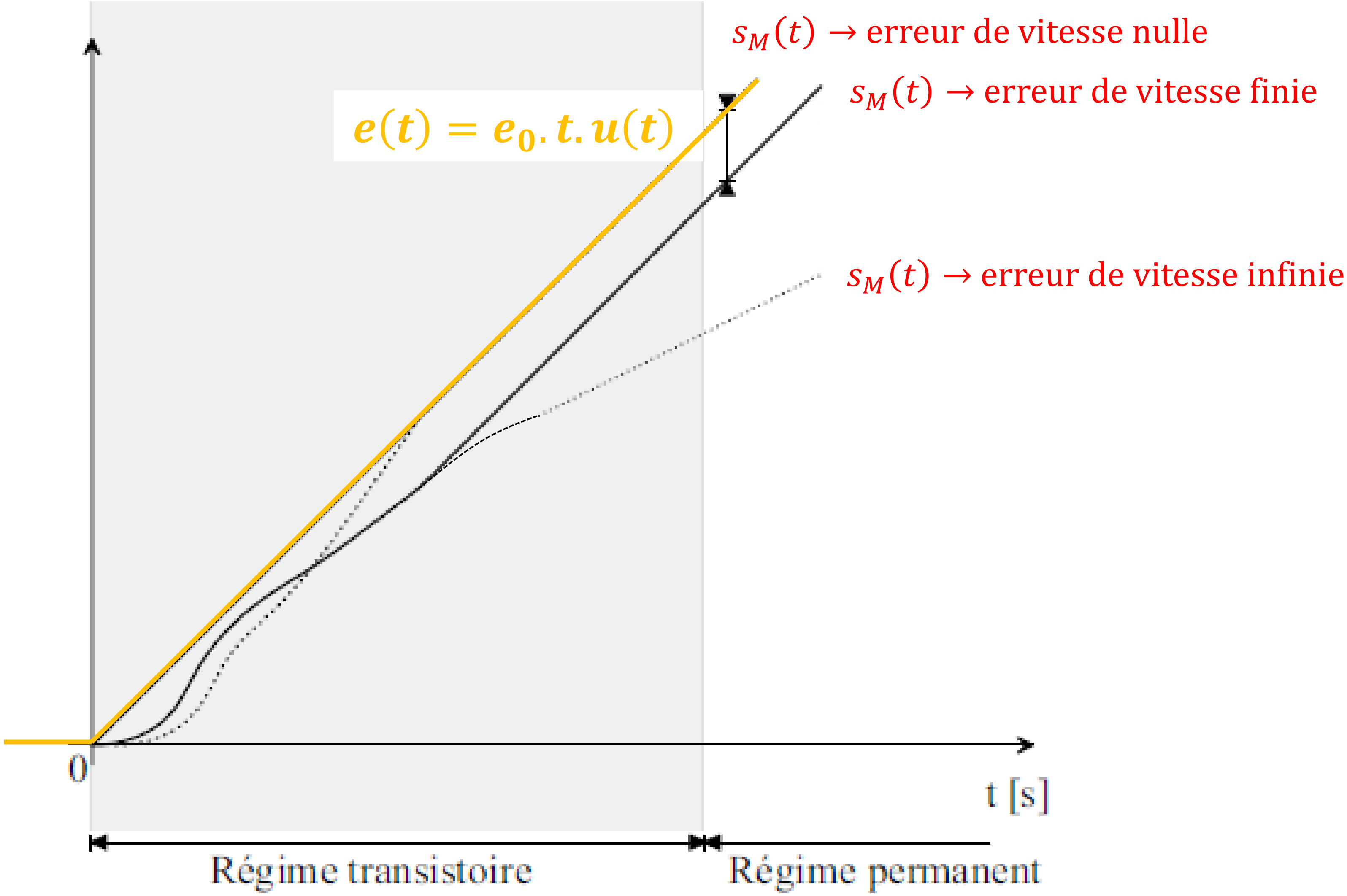
Remarque : $R_i(0) = 1$ **et** $T_i(0) = \frac{K_i}{p^{\alpha_i}}$

Entrée de consigne échelon de position



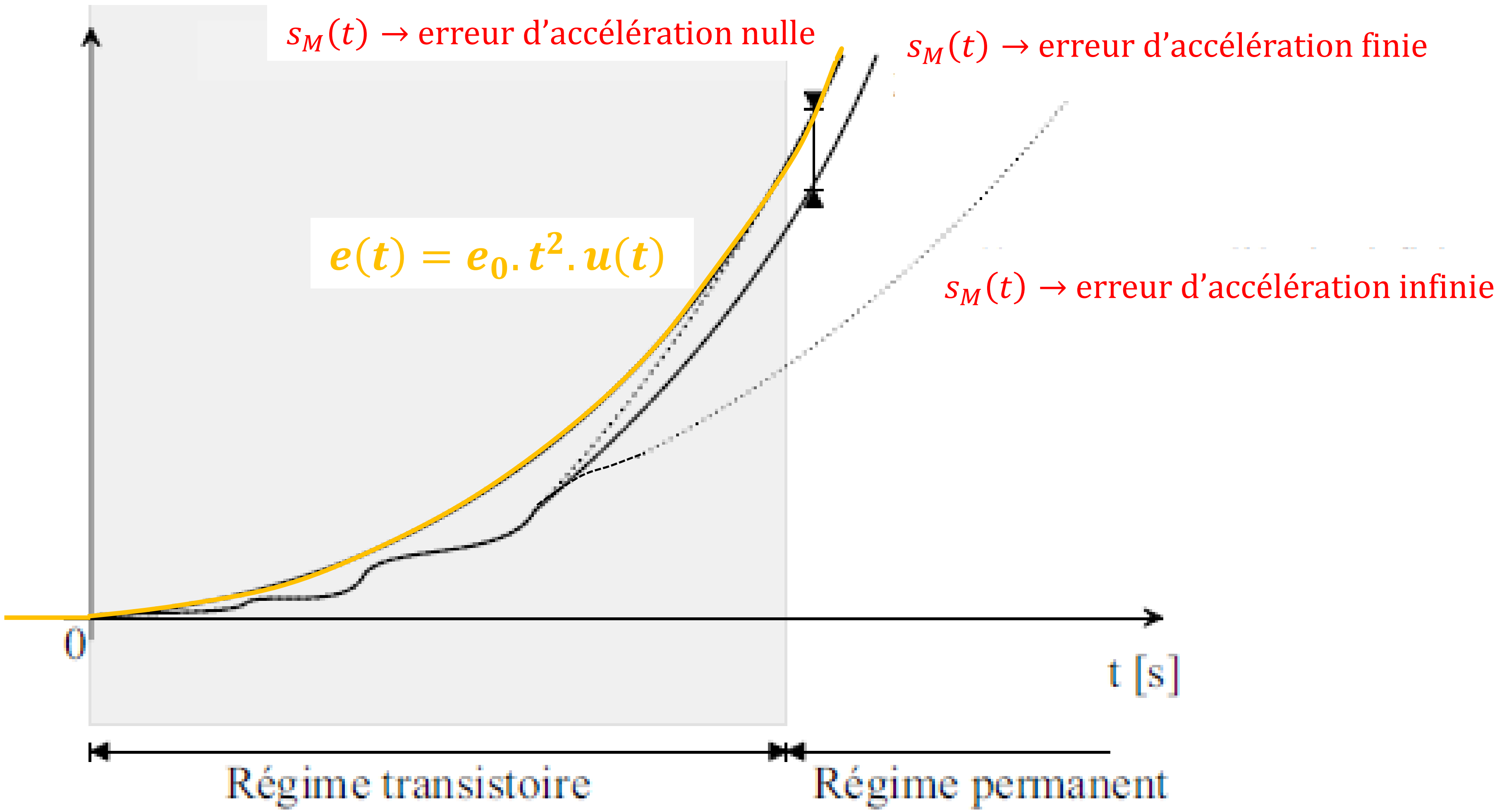
Remarque : Lorsque $e(t)$ et $p(t)$ sont des **échelons de position**, l'erreur en régime permanent s'appelle **erreur de position**.

Entrée de consigne échelon de vitesse



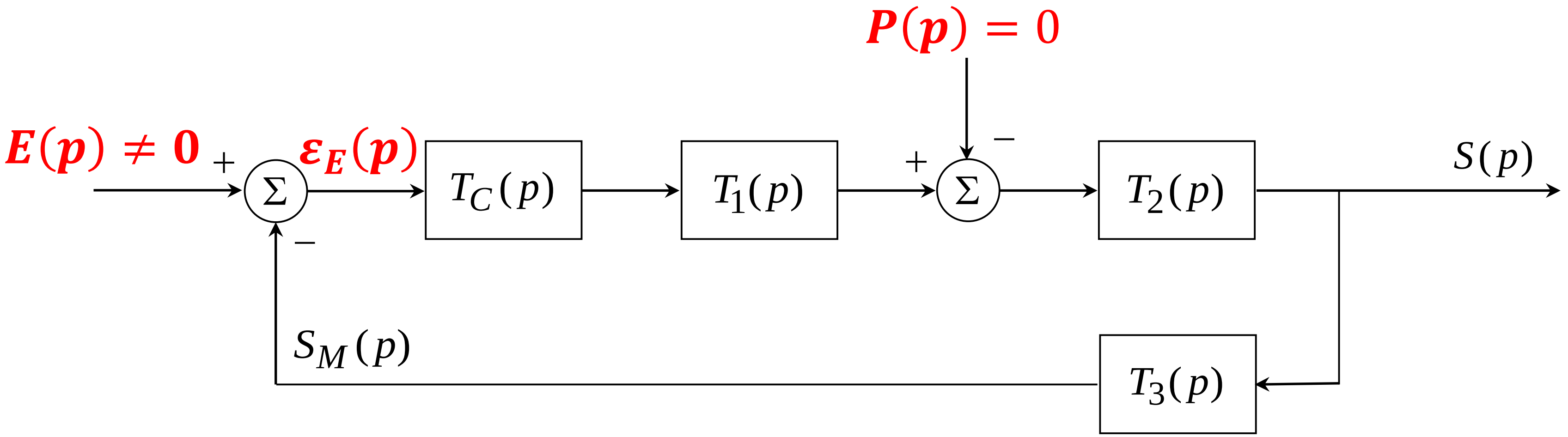
Remarque : Lorsque $e(t)$ et $p(t)$ sont des **échelons de vitesse**, l'erreur en régime permanent s'appelle **erreur de vitesse**.

Entrée de consigne échelon d'accélération



Remarque : Lorsque $e(t)$ et $p(t)$ sont des **échelons d'accélération**, l'erreur en régime permanent s'appelle **erreur d'accélération**.

Expression de l'erreur due au signal de consigne $E(p)$



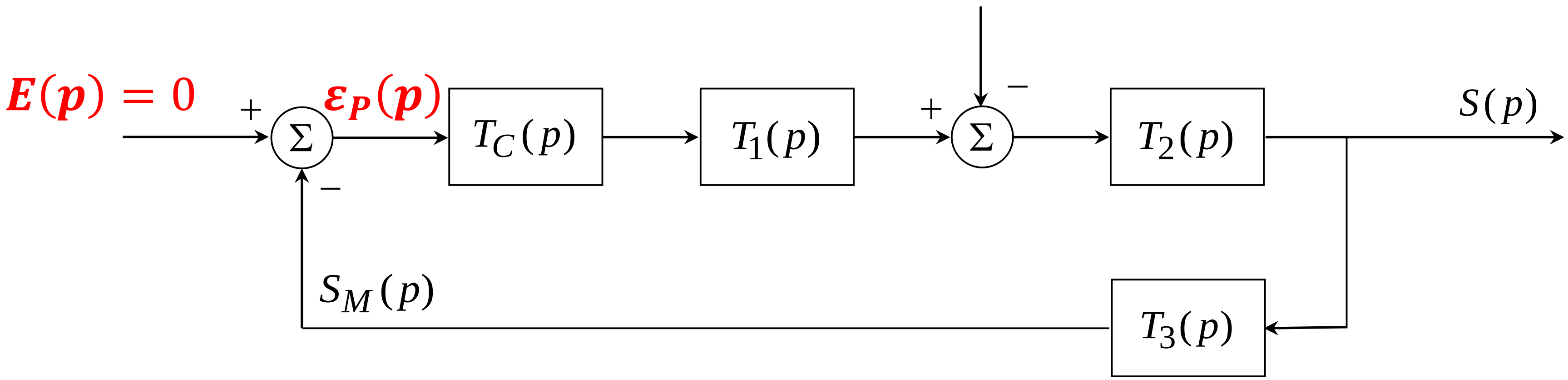
$$\varepsilon_E(p) = E(p) - S_M(p)$$

$$\varepsilon_E(p) = E(p) - T_C(p).T_1(p).\,T_2(p).\,T_3(p).\varepsilon_E(p)$$

$$T_{E\varepsilon}(p) = \frac{\varepsilon_E(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + T_C(p).T_1(p).\,T_2(p).\,T_3(p)} = \frac{1}{1 + T_B(p)}$$

$$\varepsilon_E(p) = T_{E\varepsilon}(p).E(p)$$

Expression de l'erreur due au signal de perturbation $P(p)$



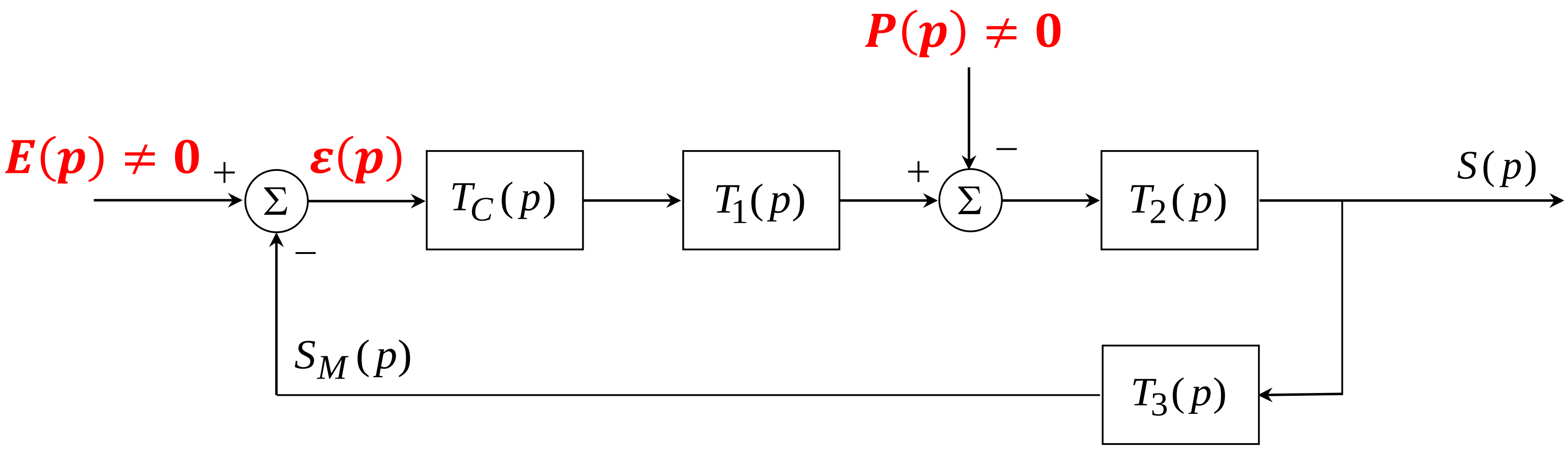
$$\varepsilon_P(p) = 0 - S_M(p)$$

$$\varepsilon_P(p) = -T_C(p).T_1(p).\,T_2(p).\,T_3(p).\varepsilon_P(p) + T_2(p).\,T_3(p).P(p)$$

$$T_{P\varepsilon}(p) = \frac{\varepsilon_P(p)}{P(p)} = \frac{T_2(p).\,T_3(p)}{1 + T_C(p).T_1(p).\,T_2(p).\,T_3(p)} = \frac{T_2(p).\,T_3(p)}{1 + T_B(p)}$$

$$\varepsilon_P(p) = T_{P\varepsilon}(p).P(p)$$

Expression de l'erreur totale



$$\boldsymbol{\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) + \varepsilon_P(p)}$$

$$\varepsilon(p) = T_{E\varepsilon}(p).E(p) + T_{P\varepsilon}(p).P(p)$$

- Pour le système considéré l'erreur en régime permanent s'exprime par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.T_{E\varepsilon}(p).E(p) + \lim_{p\to 0} p.T_{P\varepsilon}(p).P(p)}$$

Expression de l'erreur totale

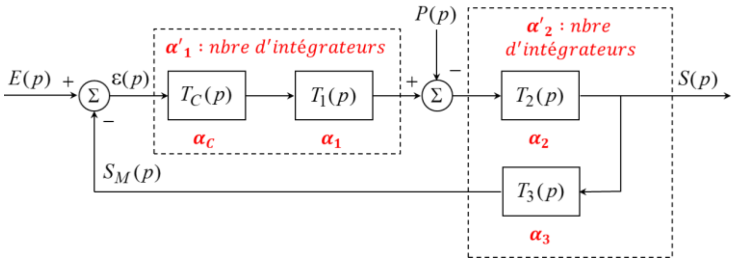
$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\frac{1}{1+T_B(p)}.E(p) + \lim_{p\to 0} p.\frac{T_2(p).T_3(p)}{1+T_B(p)}.P(p)$$

Remarque : $\boldsymbol{T_i(0) = \frac{K_i}{p^{\alpha_i}}}$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\frac{1}{1+\frac{K_B}{p^{\alpha_B}}}.E(p) + \lim_{p\to 0} p.\frac{\frac{K_2}{p^{\alpha_2}}.\frac{K_3}{p^{\alpha_3}}}{1+\frac{K_B}{p^{\alpha_B}}}.P(p)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha_B+1}}{p^{\alpha_B}+K_B}.E(p) + \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha_B-\alpha_2-\alpha_3+1}.K_2.K_3}{p^{\alpha_B}+K_B}.P(p)$$

Remarque : $\boldsymbol{\alpha_B = \alpha'_1 + \alpha'_2}$



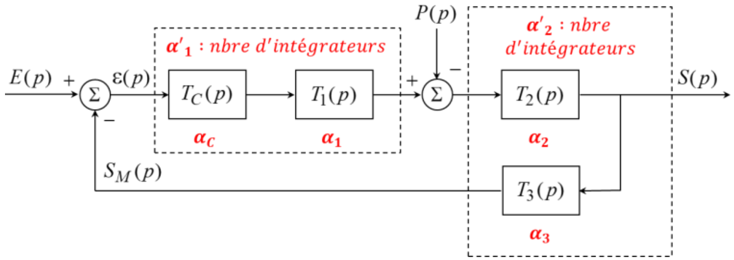
$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha_B+1}}{p^{\alpha_B}+K_B}.E(p) + \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha'_1+1}.K_2.K_3}{p^{\alpha_B}+K_B}.P(p)$$

Calcul pour une entrée particulière

$$e(t) = e_0 . u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{e_0}{p}$$

$$p(t) = p_0 . u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} P(p) = \frac{p_0}{p}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha_B + 1}}{p^{\alpha_B} + K_B} . E(p) + \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha'_1 + 1} . K_2 . K_3}{p^{\alpha_B} + K_B} . P(p)$$



Position des intégrateurs :

- **cas n°1 :** aucun intégrateur dans la boucle $\boldsymbol{\alpha_B = 0}$, $\boldsymbol{\alpha'_1 = 0}$ et $\boldsymbol{\alpha'_2 = 0}$,
- **cas n°2 :** un intégrateur dans la boucle $\boldsymbol{\alpha_B = 1}$, l'intégrateur étant situé avant le point d'application de la perturbation $\boldsymbol{\alpha'_1 = 1}$ et $\boldsymbol{\alpha'_2 = 0}$,
- **cas n°3 :** un intégrateur dans la boucle $\boldsymbol{\alpha_B = 1}$, l'intégrateur étant situé après le point d'application de la perturbation $\boldsymbol{\alpha'_1 = 0}$ et $\boldsymbol{\alpha'_2 = 1}$.

cas n°1 : $\alpha_B = 0, \alpha'_1 = 0$ et $\alpha'_2 = 0$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha_B+1}}{p^{\alpha_B} + K_B} . E(p) + \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha'_1+1} . K_2 . K_3}{p^{\alpha_B} + K_B} . P(p)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{p^{0+1}}{p^{0} + K_B} . \frac{e_0}{p} + \lim_{p \to 0} \frac{p^{0+1} . K_2 . K_3}{p^{0} + K_B} . \frac{p_0}{p}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{p}{1 + K_B} . \frac{e_0}{p} + \lim_{p \to 0} \frac{p . K_2 . K_3}{1 + K_B} . \frac{p_0}{p}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1 + K_B} . e_0 + \lim_{p \to 0} \frac{K_2 . K_3}{1 + K_B} . p_0$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{1}{1 + K_B} . e_0 + \frac{K_2 . K_3}{1 + K_B} . p_0$$

$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon_{E\infty} + \varepsilon_{P\infty}$$

cas n°2 : $\alpha_B = 1, \alpha'_1 = 1$ et $\alpha'_2 = 0$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha_B + 1}}{p^{\alpha_B} + K_B} . \boldsymbol{E(p)} + \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha'_1 + 1} . K_2 . K_3}{p^{\alpha_B} + K_B} . \boldsymbol{P(p)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{p^{1+1}}{p^{1} + K_B} . \frac{\boldsymbol{e_0}}{\boldsymbol{p}} + \lim_{p \to 0} \frac{p^{1+1} . K_2 . K_3}{p^{1} + K_B} . \frac{\boldsymbol{p_0}}{\boldsymbol{p}}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{p^2}{p + K_B} . \frac{\boldsymbol{e_0}}{\boldsymbol{p}} + \lim_{p \to 0} \frac{p^2 . K_2 . K_3}{p + K_B} . \frac{\boldsymbol{p_0}}{\boldsymbol{p}}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{p}{p + K_B} . \boldsymbol{e_0} + \lim_{p \to 0} \frac{p . K_2 . K_3}{p + K_B} . \boldsymbol{p_0}$$

$$\varepsilon(\infty) = 0 + 0$$

$$\varepsilon(\infty) = \boldsymbol{\varepsilon_{E\infty}} + \boldsymbol{\varepsilon_{P\infty}}$$

cas n°3 : $\alpha_B = 1, \alpha'_1 = 0$ et $\alpha'_2 = 1$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha_B+1}}{p^{\alpha_B} + K_B} . E(p) + \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha'_1+1} . K_2 . K_3}{p^{\alpha_B} + K_B} . P(p)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{1+1}}{p^{1} + K_B} . \frac{e_0}{p} + \lim_{p\to 0} \frac{p^{0+1} . K_2 . K_3}{p^{1} + K_B} . \frac{p_0}{p}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{2}}{p + K_B} . \frac{e_0}{p} + \lim_{p\to 0} \frac{p . K_2 . K_3}{p + K_B} . \frac{p_0}{p}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{p}{p + K_B} . e_0 + \lim_{p\to 0} \frac{K_2 . K_3}{p + K_B} . p_0$$

$$\varepsilon(\infty) = 0 + \frac{K_2 . K_3}{K_B} . p_0 \qquad \varepsilon(\infty) = 0 + \frac{1}{K_C . K_1} . p_0$$

$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon_{E\infty} + \varepsilon_{P\infty}$$

Généralisation

α'_1	α'_2	α_B	Erreur de position ou erreur statique en régime permanent			Erreur de vitesse ou erreur de traînage en régime permanent			Erreur d'accélération en régime permanent		
			Consigne	Perturbation	Consigne + Perturbation	Consigne	Perturbation	Consigne + Perturbation	Consigne	Perturbation	Consigne + Perturbation
			$\varepsilon_{E\infty}$	$\varepsilon_{P\infty}$	ε_{∞}	$\varepsilon_{E\infty}$	$\varepsilon_{P\infty}$	ε_{∞}	$\varepsilon_{E\infty}$	$\varepsilon_{P\infty}$	ε_{∞}
0	0	0	$e_0 \dfrac{1}{1+K_B}$	$p_0 \dfrac{K_2K_3}{1+K_B}$	$e_0 \dfrac{1}{1+K_B} + p_0 \dfrac{K_2K_3}{1+K_B}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	1	1	0	$p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$	$p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$	$e_0 \dfrac{1}{K_B}$	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	1	0	0	0	$e_0 \dfrac{1}{K_B}$	$p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$	$e_0 \dfrac{1}{K_B} + p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$	∞	∞	∞
1	1	2	0	0	0	0	$p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$	$p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$	$e_0 \dfrac{1}{K_B}$	∞	∞
2	0	2	0	0	0	0	0	0	$e_0 \dfrac{1}{K_B}$	$p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$	$e_0 \dfrac{1}{K_B} + p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$
2	1	3	0	0	0	0	0	0	0	$p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$	$p_0 \dfrac{1}{K_1K_C}$
3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Commentaires sur le tableau

Erreur permanente due au signal de consigne (entrée principale) : $\varepsilon_{E\infty}$

- Une **erreur nulle** ne peut être obtenue qu'avec un **nombre d'intégrateurs** α_B **suffisant** dans la fonction de transfert de boucle $T_B(p)$.

- Lorsque l'**erreur** est **finie**, on constate qu'elle est **inversement proportionnelle** au gain statique de boucle K_B et qu'elle est **proportionnelle** à e_0.

Erreur permanente due au signal de perturbation (entrée secondaire) : $\varepsilon_{P\infty}$

- Une **erreur nulle** ne peut être obtenue qu'avec un **nombre d'intégrateurs** α'_1 (**situées avant le point d'application de la perturbation**) **suffisant** dans l'ensemble $T_C(p).T_1(p)$.

- Lorsque l'**erreur** est **finie**, on constate qu'elle est **inversement proportionnelle** au produit des gains statique de boucle $K_C.K_1$ (**situées avant le point d'application de la perturbation**) et qu'elle est **proportionnelle** à p_0.

Conclusions

- **Il apparaît donc que la précision (donc l'erreur) et la stabilité vont être la source de compromis puisque :**

  - **Pour avoir un système précis, donc possédant une erreur faible, il faut un gain statique de boucle K_B important.**

  - **On sait aussi qu'en augmentant le gain statique de boucle K_B d'un système on peut le rendre instable.**

  - **Pour avoir une erreur nulle en régime permanent, on peut ajouter le nombre d'intégrateur nécessaire par l'intermédiaire de $T_C(p)$.**

  - **Néanmoins toute intégration rajoutée dans la fonction de transfert de boucle $T_B(p)$ ajoute un déphasage de -90° et donc peut induire une instabilité.**