Chapitre 3 : Pôles et Stabilité

Etude préliminaire de la stabilité par la réponse impulsionnelle

$$E(p) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow S(p)$$

$$S(p) = G(p).E(p) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{E(p) = 1}$$

$$S(p) = G(p) \quad \Rightarrow \boldsymbol{s(t) = g(t)}$$

- Un mode apériodique est un mode associé à un pôle réel.

$$\frac{\boldsymbol{A_i}}{\boldsymbol{p - p_i}} \quad \longmapsto \quad \boldsymbol{A_i.e^{-p_i.t}}$$

- **Remarque :** ce mode a l’allure d’une exponentielle dont le taux de croissance ou décroissance ne dépend que du pôle lui-même.

Modes apériodiques et modes oscillatoires

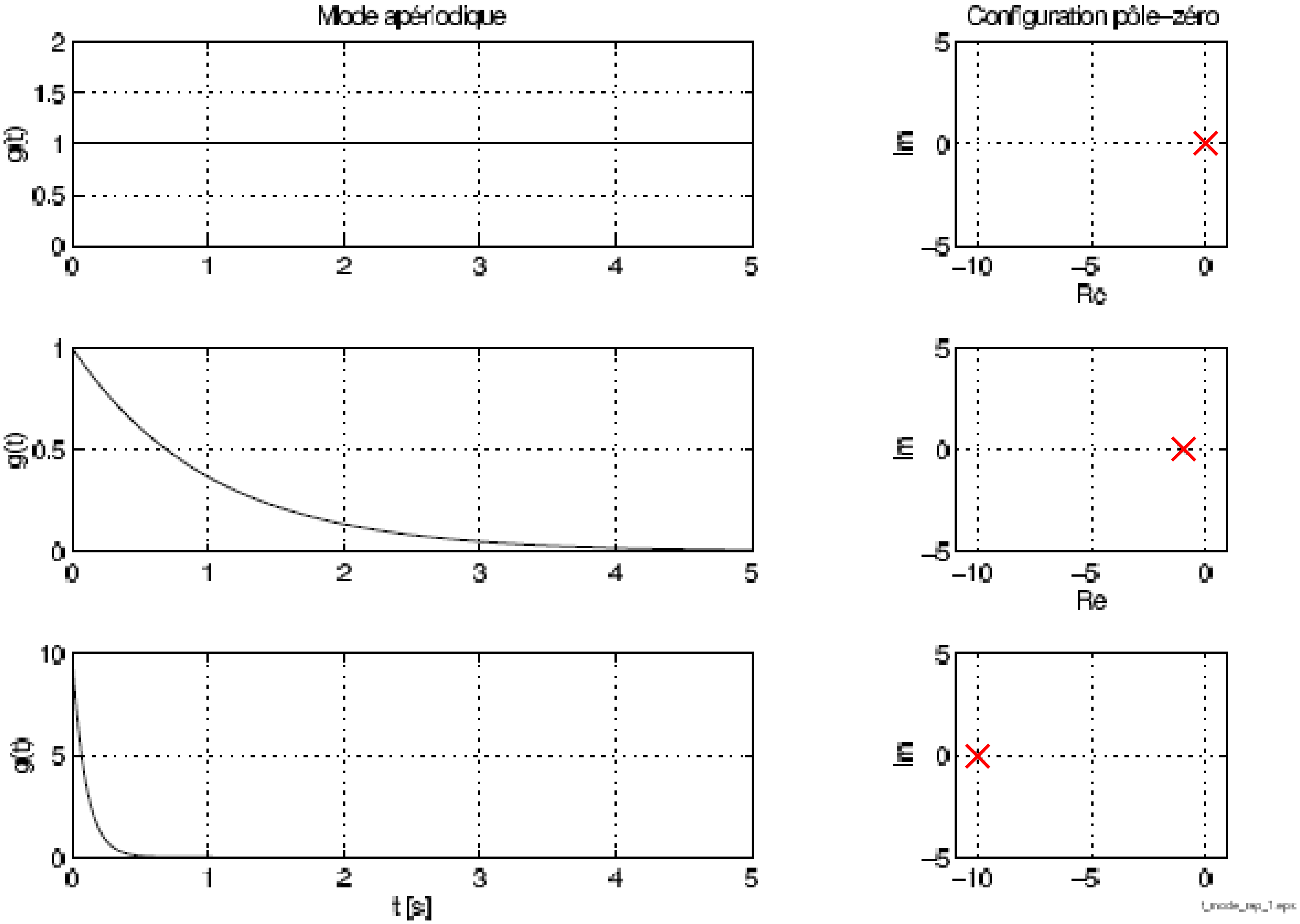
- Un mode oscillatoire est un mode associé à une paire de pôles complexes conjugués.

$$\frac{k}{(p+\delta)^2+\omega_0^2} = \frac{A_i}{p-p_i} + \frac{\overline{A_i}}{p-\overline{p_i}} \quad \longmapsto \quad A_i.e^{-\delta.t} sin(\omega_0^2.t)$$

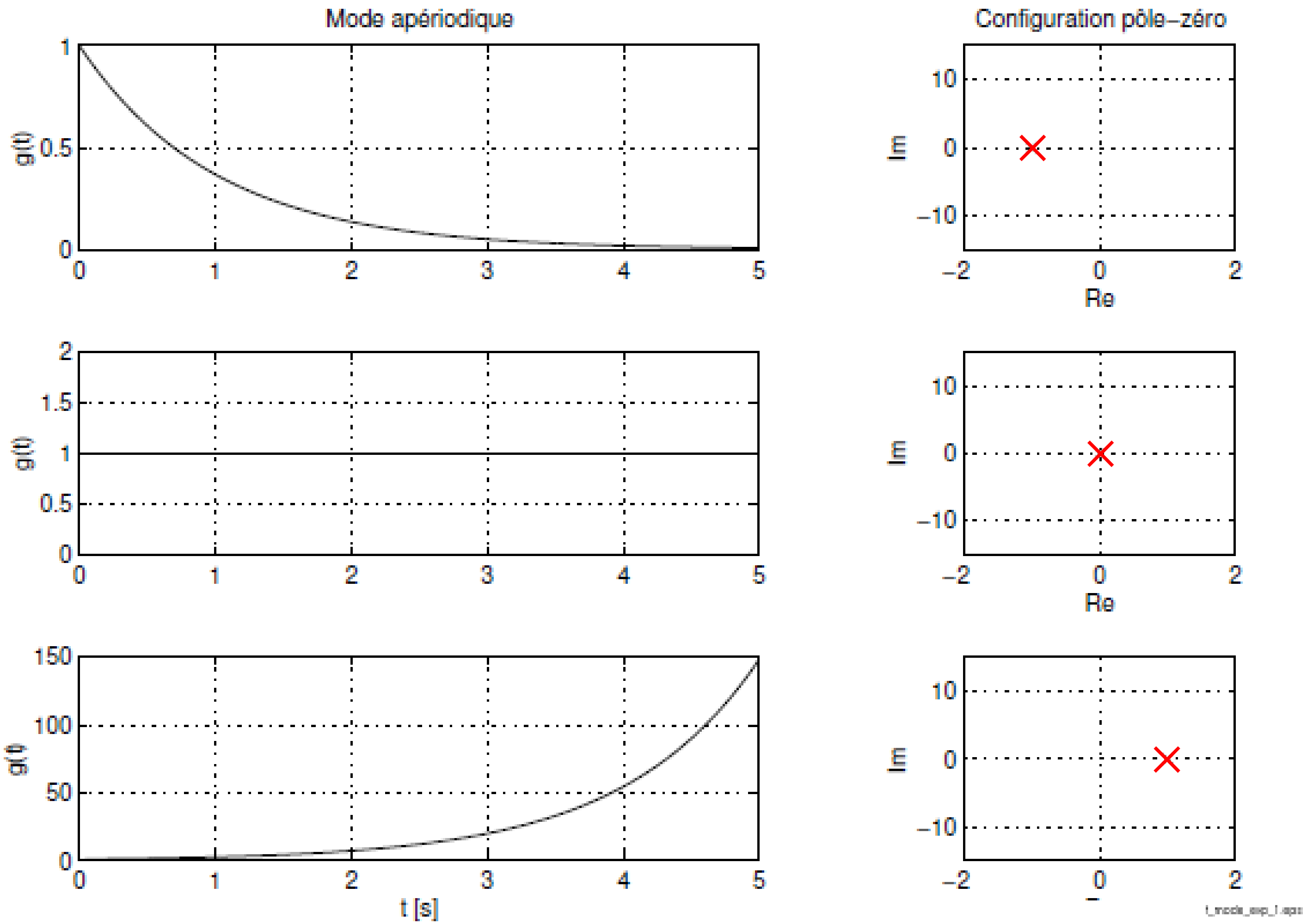
$$\begin{cases} -\delta = \Re(p_i) \\ \omega_0 = \Im(p_i) \end{cases}$$

- **Remarque :** ce mode est constitué d'un terme sinusoïdal pondéré par une exponentielle. La pulsation de la sinusoïde est égale à la partie imaginaire (en valeur absolue) ω_0 des pôles et le paramètre de l'exponentielle est donné par leur partie réelle $-\delta$.

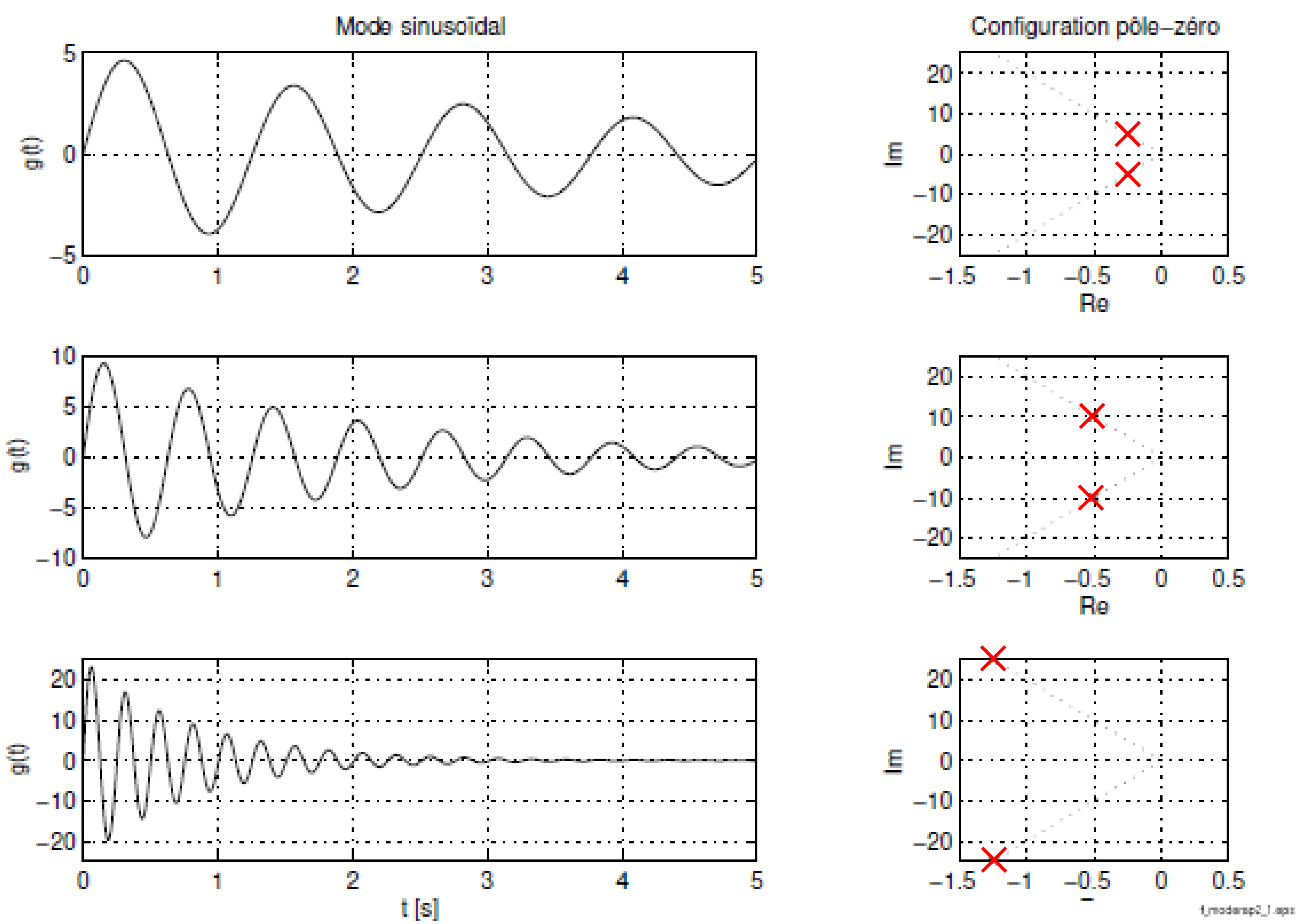
Mode apériodique : Influence de la position du pôle sur la rapidité du mode



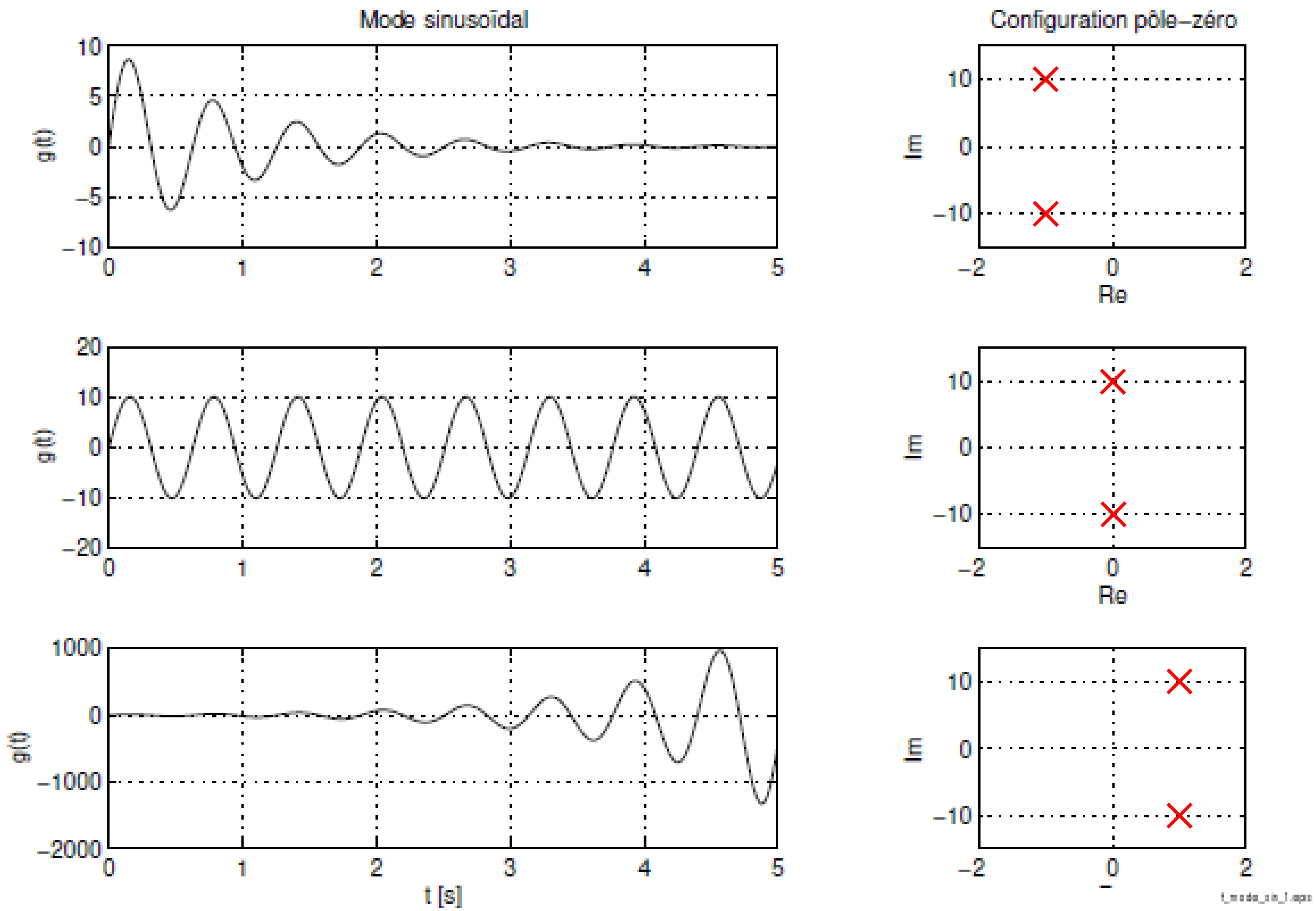
Mode apériodique : Influence du signe du pôle sur le mode temporel



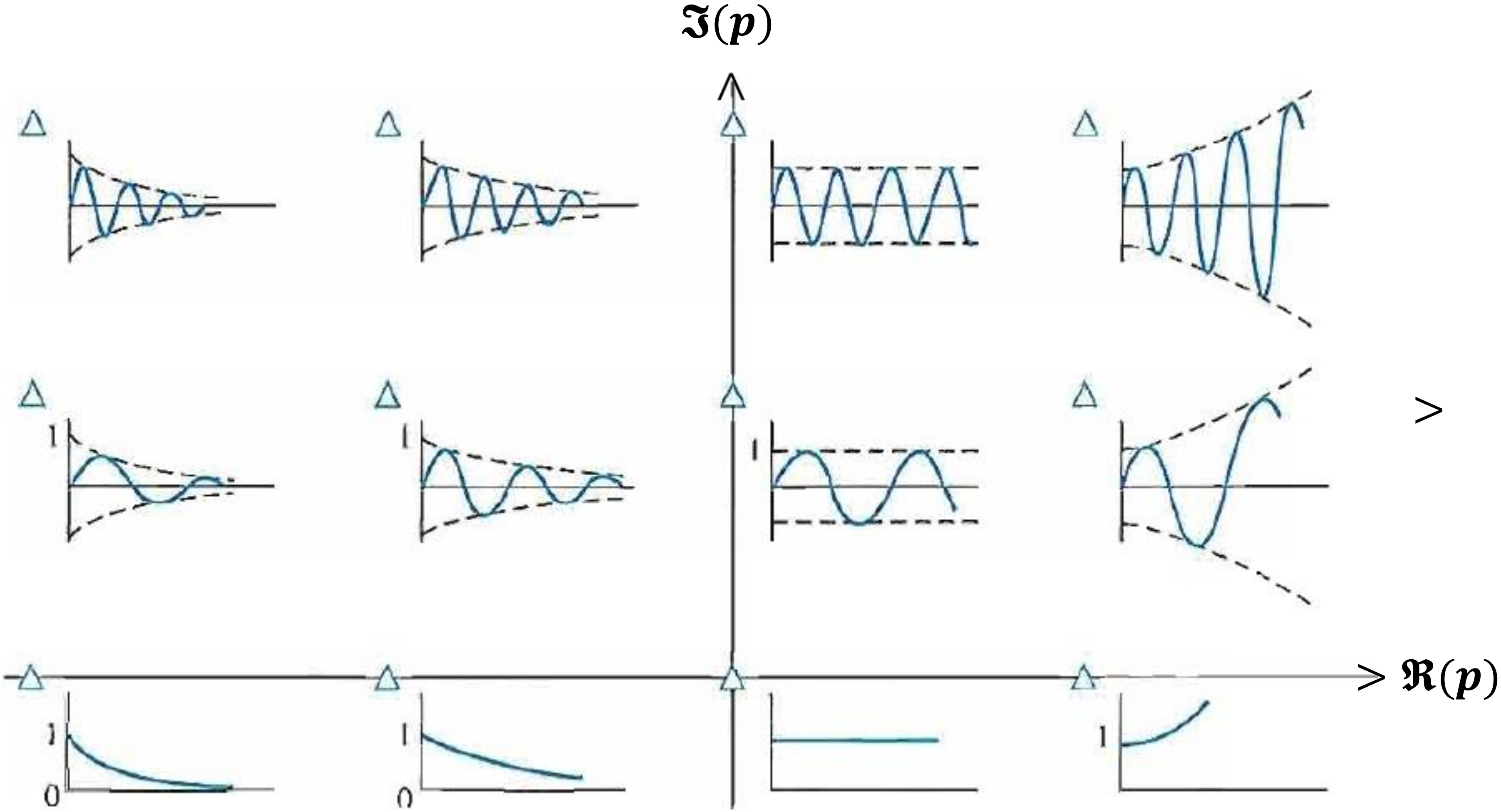
Mode oscillatoire : Influence de la position du pôle sur la rapidité du mode



Mode oscillatoire : Influence du signe du pôle sur le mode temporel



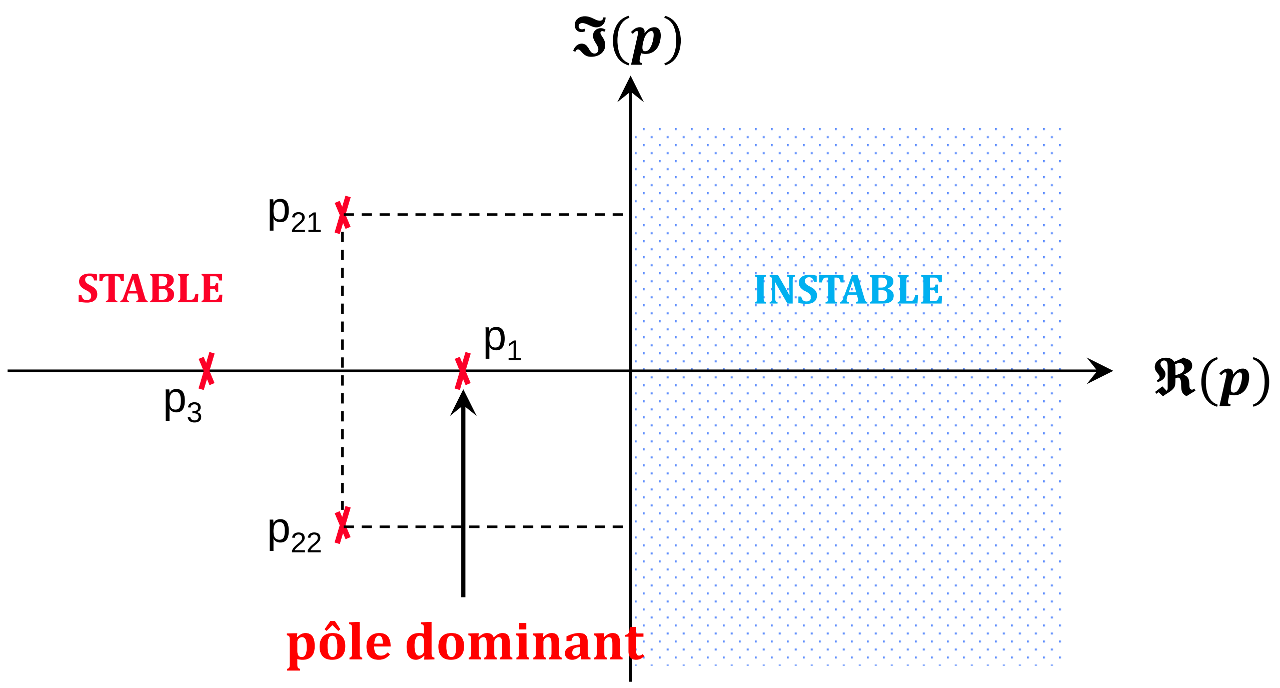
Récapitulatif

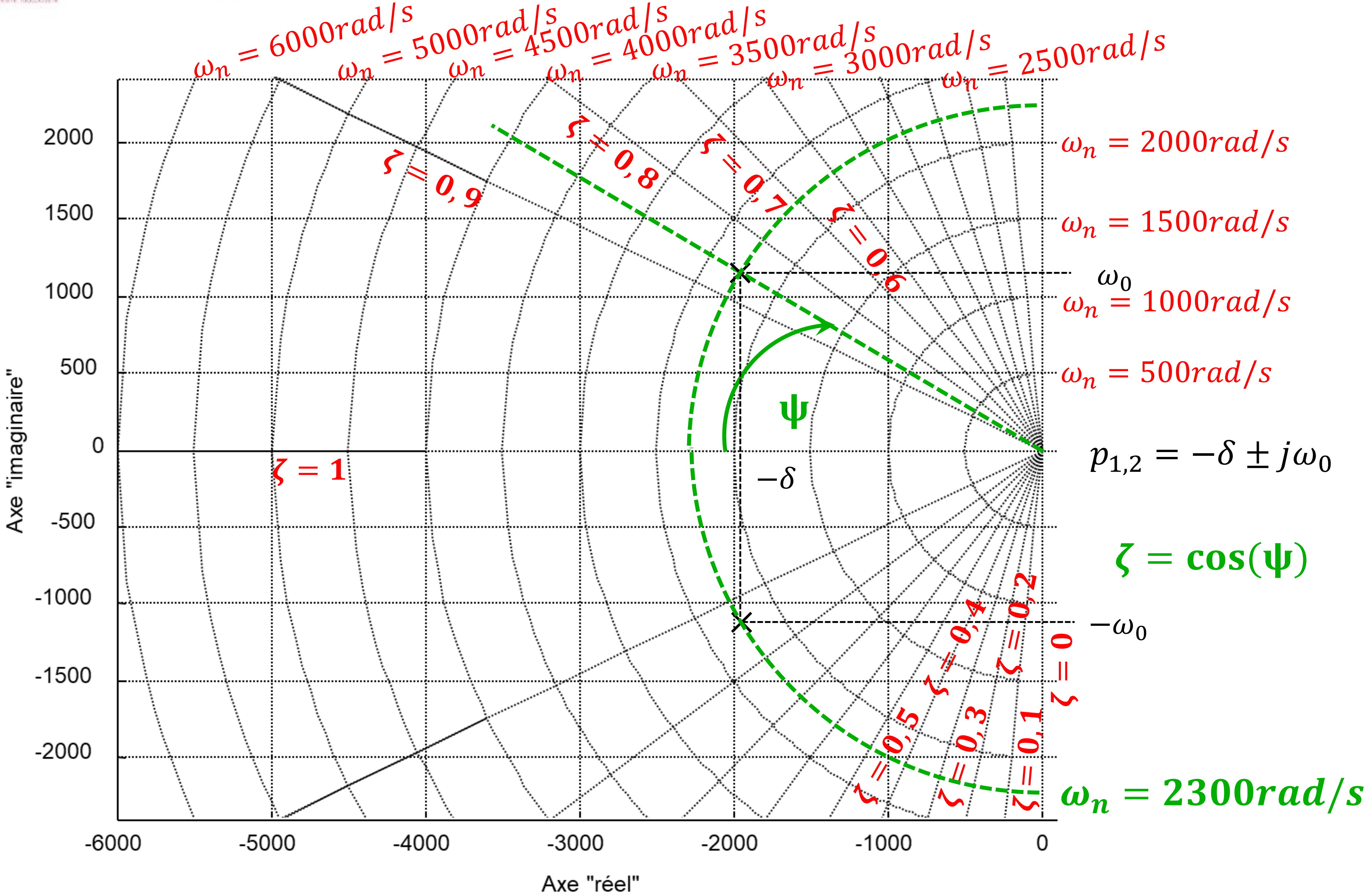


Modes dominants – Pôles dominants

Les **pôles dominants** sont ceux qui sont associés aux **modes dominants** (ceux qui ont donc le **transitoire le plus long**).

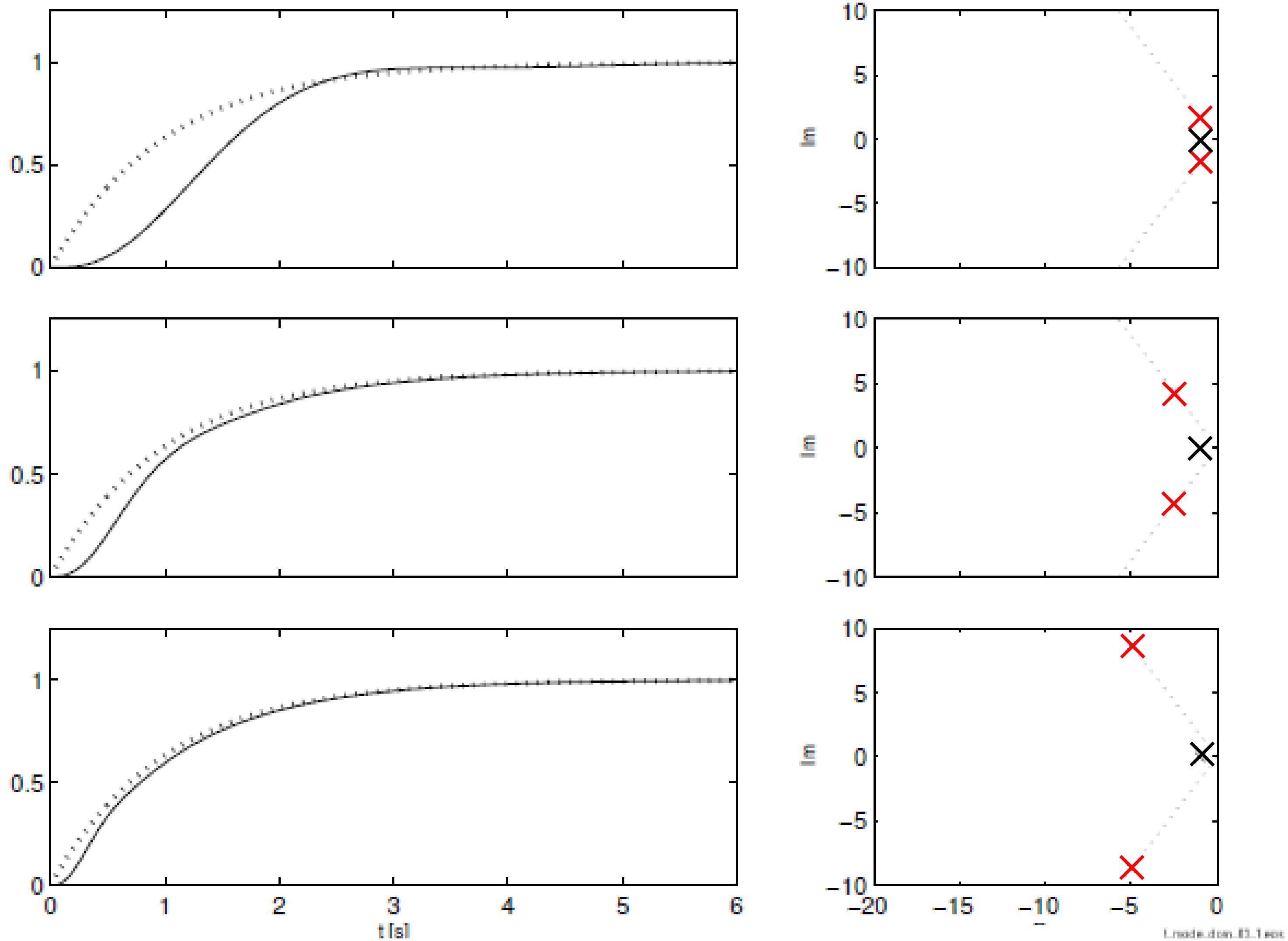
$|\Re(p_i)|$ ***la plus petite***





$\omega_n = 6000 rad/s$
$\omega_n = 5000 rad/s$
$\omega_n = 4500 rad/s$
$\omega_n = 4000 rad/s$
$\omega_n = 3500 rad/s$
$\omega_n = 3000 rad/s$
$\omega_n = 2500 rad/s$
$\omega_n = 2000 rad/s$
$\omega_n = 1500 rad/s$
$\omega_n = 1000 rad/s$
$\omega_n = 500 rad/s$
$\zeta = 0,9$
$\zeta = 0,8$
$\zeta = 0,7$
$\zeta = 0,6$
$\zeta = 0,5$
$\zeta = 0,4$
$\zeta = 0,3$
$\zeta = 0,2$
$\zeta = 0,1$
$\zeta = 0$
$\zeta = 1$
ω_0
$-\omega_0$
$-\delta$
ψ
$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$
$\zeta = \cos(\psi)$
$\omega_n = 2300 rad/s$
Axe "imaginaire"
Axe "réel"
2000
1500
1000
500
0
-500
-1000
-1500
-2000
-6000
-5000
-4000
-3000
-2000
-1000
0

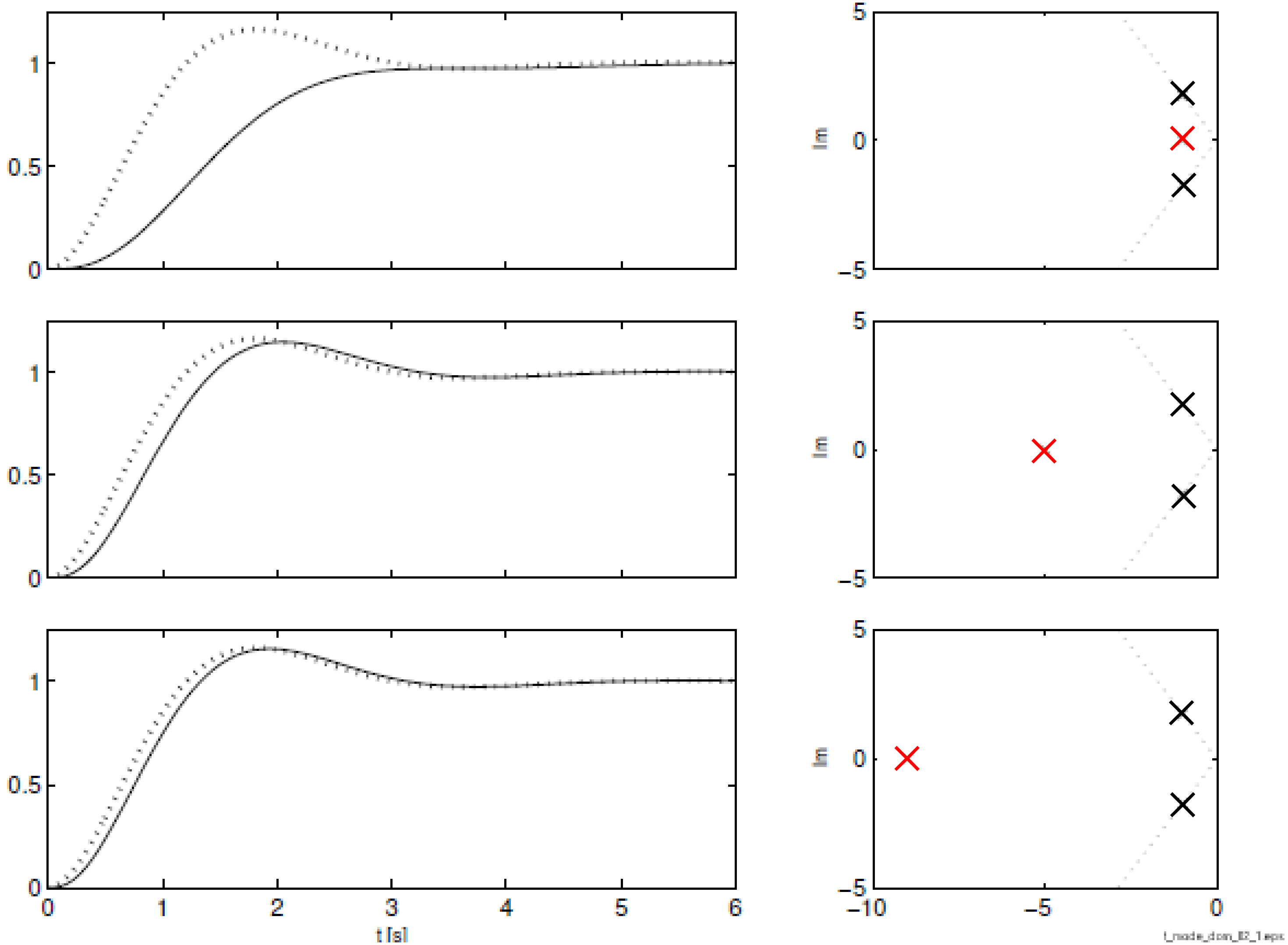
Pôles dominants : Réponses indicielles d'un système d'ordre 3



En pointillé, la réponse indicielle du pôle dominant seul

Pôles dominants : Réponses indicielles d'un système d'ordre 3

En pointillé, la réponse indicielle des 2 pôles dominants seuls



Addition d'un pôle ou d'un zéro à une paire de pôles dominants

- **L'addition d'un pôle p_{add} à une paire de pôles dominants p_{dom} augmente le temps de montée si $|p_{add}| \leq 4.|\Re(p_{dom})|$.**

- **L'addition d'un zéro à partie réelle négative z_n à une paire de pôles dominants p_{dom} augmente le dépassement si $|z_n| \leq 4.|\Re(p_{dom})|$.**

- **L'addition d'un zéro à partie réelle positive z_p à une paire de pôles dominants p_{dom} diminue le dépassement mais provoque le phénomène de réponse inverse augmentant ainsi le temps de réponse.**

Exemple : Addition d'un zéro à une paire de pôles dominants

$$H(p) = \frac{K.\left(1 + \frac{1}{\alpha.\zeta.\omega_n}.p\right)}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}.p + \frac{1}{\omega_n^2}.p^2} \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{\alpha = \pm 1}$$

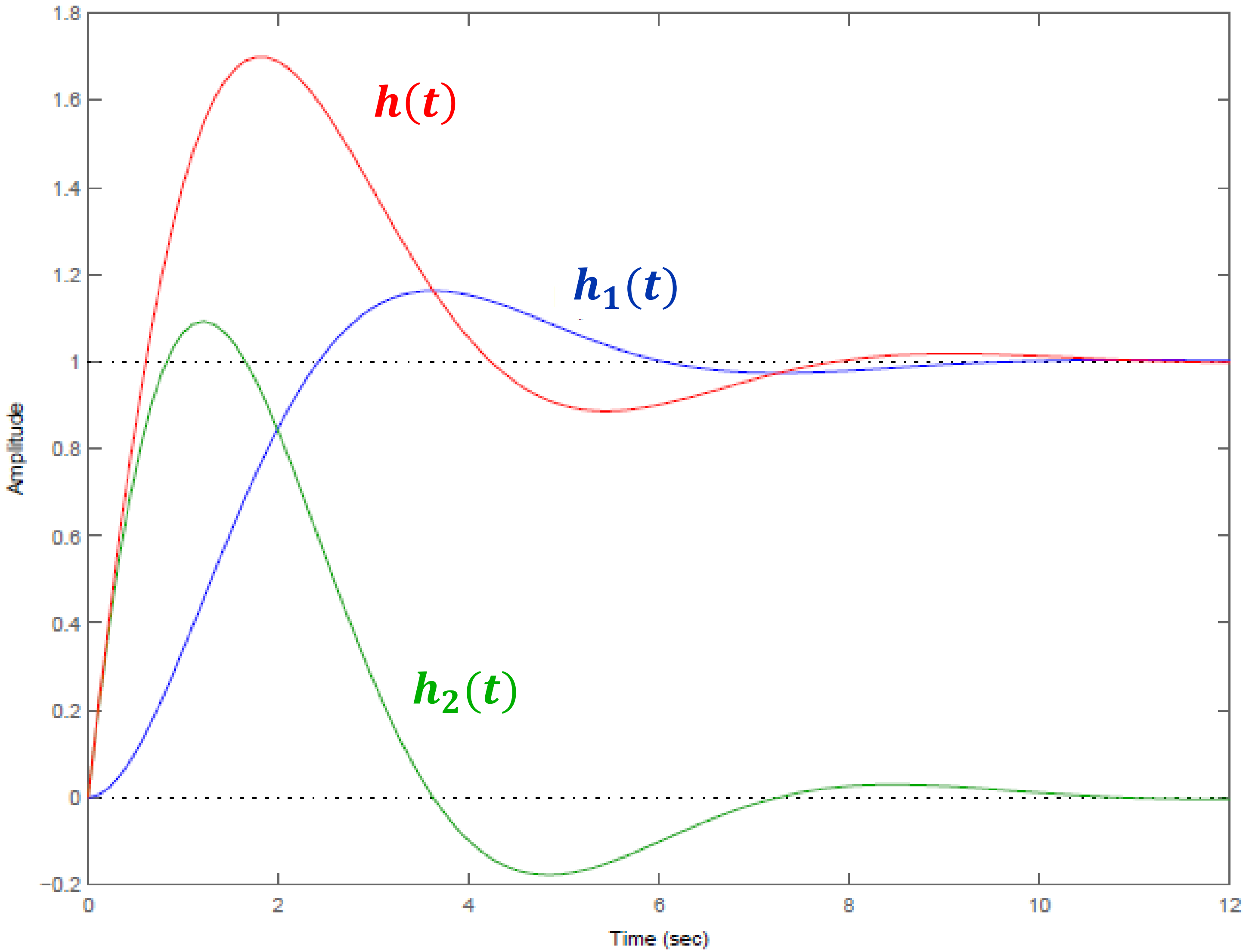
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}.p + \frac{1}{\omega_n^2}.p^2} + \frac{1}{\alpha.\zeta.\omega_n}.p.\frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}.p + \frac{1}{\omega_n^2}.p^2}$$

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) \qquad H_2(p) = \frac{1}{\alpha.\zeta.\omega_n}.p.H_1(p)$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \qquad \boldsymbol{h_2(t) = \frac{1}{\alpha.\zeta.\omega_n}.\frac{dh_1(t)}{dt}}$$

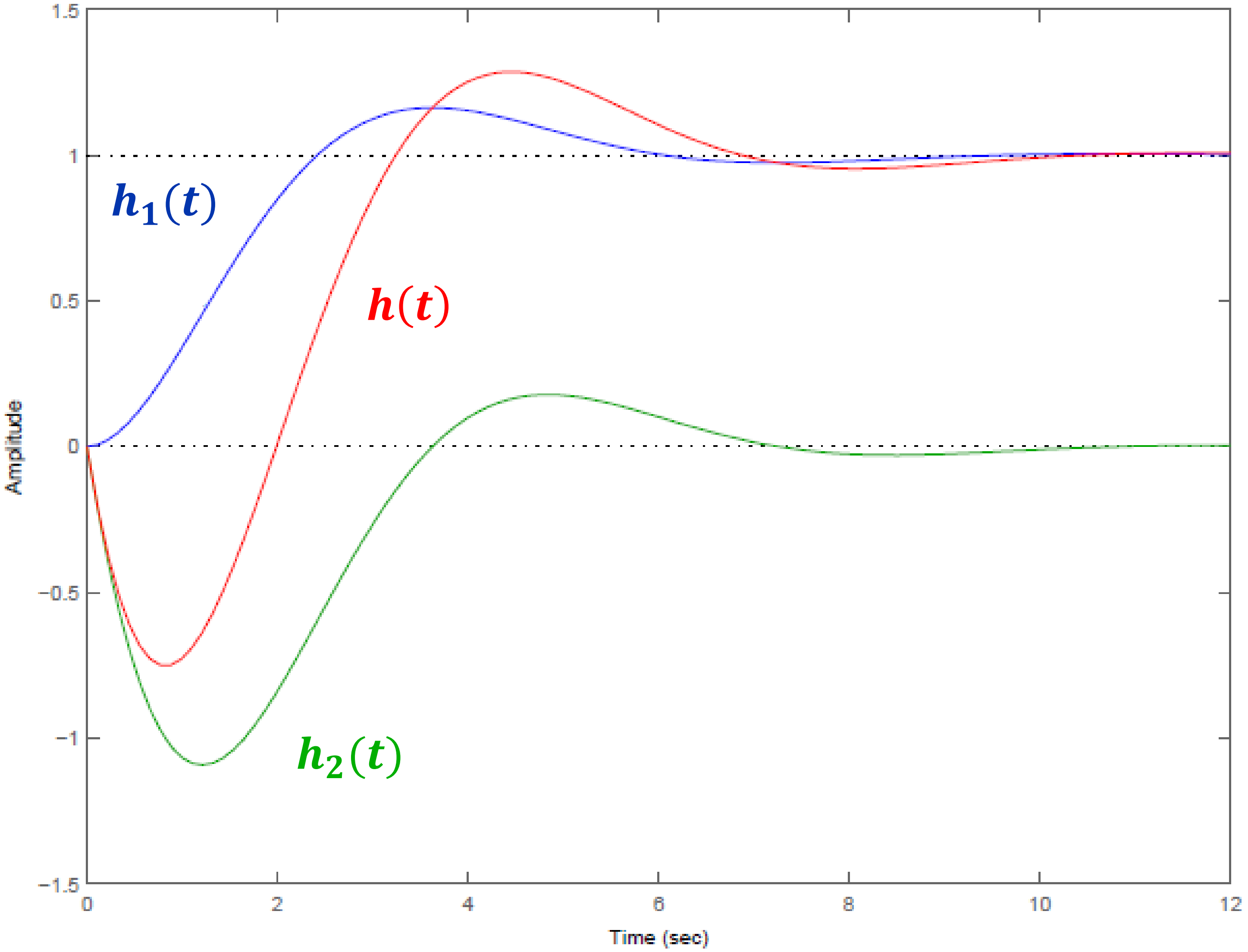
- **Remarque :** Le fait d'ajouter un zéro à la fonction de transfert ajoute la dérivée de la réponse multipliée par un coefficient égal au zéro.

Addition d'un zéro négatif à une paire de pôles dominants (réponse indicielle)



$$\begin{cases} K = 1 \\ \zeta = 0,5 \\ \omega_n = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Addition d’un zéro positif à une paire de pôles dominants (réponse indicielle)



$$\begin{cases} K = 1 \\ \zeta = 0,5 \\ \omega_n = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Définition de la stabilité

- Un système est « **EBSB – stable** » si et seulement si sa réponse à une entrée bornée quelconque est bornée.

- **Remarque :** un signal $\boldsymbol{f(t)}$ est borné si et seulement si tous les pôles de sa transformée de Laplace $\boldsymbol{F(p)}$ sont à partie réelle strictement négative d'ordre quelconque ou à partie réelle nulle simple (d'ordre1).

On sait que pour un système :

$$S(p) = T(p).E(p) + T_{CI}(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.E(p) + \frac{N_{CI}(p)}{D(p)}.$$

Dans ce cas le signal $\boldsymbol{s(t)}$ est borné si $\boldsymbol{T(p)}$ possède des pôles à partie réelle négative.

Critère mathématique de stabilité

- Ce critère concerne **les systèmes asservis ou non asservis**.
- Dans ce cas on suppose connaître explicitement les pôles $\boldsymbol{p_i}$ de $\boldsymbol{T(p)}$.

$$D(p) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{p_i}, \qquad \boldsymbol{i = 1 \cdots n})$$

- **Définition :** Ce système est stable, si les pôles $\boldsymbol{p_i}$ de $\boldsymbol{T(p)}$ sont tous à partie réelle **négative**.

Inconvénients du critère mathématique :

- On doit connaître explicitement les pôles $\boldsymbol{p_i}$ de $\boldsymbol{T(p)}$.
- Le calcul de pôles $\boldsymbol{p_i}$ peut devenir compliqué si l'ordre augmente.

Critère algébrique de stabilité : Critère de Routh

- Ce critère concerne **les systèmes asservis ou non asservis**.
- Dans ce cas on suppose connaître l'expression analytique de $\boldsymbol{T(p) = \frac{N(p)}{D(p)}}$.

$$\boldsymbol{D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \cdots + a_1.p + a_0}$$

- **Condition Nécessaire :**

Tous les coefficients $\boldsymbol{a_i}$ du polynôme $\boldsymbol{D(p)}$ doivent être de même signe et non nuls.

Remarque : Dans le cas contraire le système est **instable**.

Critère de Routh : Table

- Le nombre de ligne de la table de Routh : $nb_l = \partial°(D(p)) + 1$

1ère colonne

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	....	a_0	Coefficients de D(p)
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	....	a_0	
b_1	b_2	b_3	....		Coefficients calculés
c_1	c_2	c_3	....		
$\vdots$					
f_1					
g_1					

- **Condition Nécessaire et Suffisante :**

Le système sera stable si tous les éléments de la première colonne de la table Routh sont de **même signe**.

Remarque : Le nombre de pôles à partie réelle positive est égale au nombre de changement de signe dans cette première colonne.

Table de Routh : calcul des coefficients

$1^{ère}$ Colonne		$i-1$	$i^{ème}$ Col.	$i+1$	
p_1		p_{i-1}	p_i	p_{i+1}	
q_1		q_{i-1}	q_i	q_{i+1}	
		$\boxed{r_{i-1}}$	$\boxed{r_i}$		

$$r_{i-1} = p_i - q_i . \frac{p_1}{q_1}$$

$$r_i = p_{i+1} - q_{i+1} . \frac{p_1}{q_1}$$

Inconvénient du critère algébrique :

- On doit connaître l'expression analytique de $T(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$.

Critère de Routh : Exemples

$$D(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6$$

CN : Vérifiée

$nb_l = 3 + 1$

1ère colonne				
1	11	0	0	Coefficients de D(p)
6	6	0	0	
10	0			Coefficients calculés
6	0			

STABLE

$$\begin{cases} p_1 = -3 \\ p_2 = -2 \\ p_3 = -1 \end{cases}$$

$$D(p) = p^4 + 2p^3 + p^2 + 4p + 4$$

CN : Vérifiée

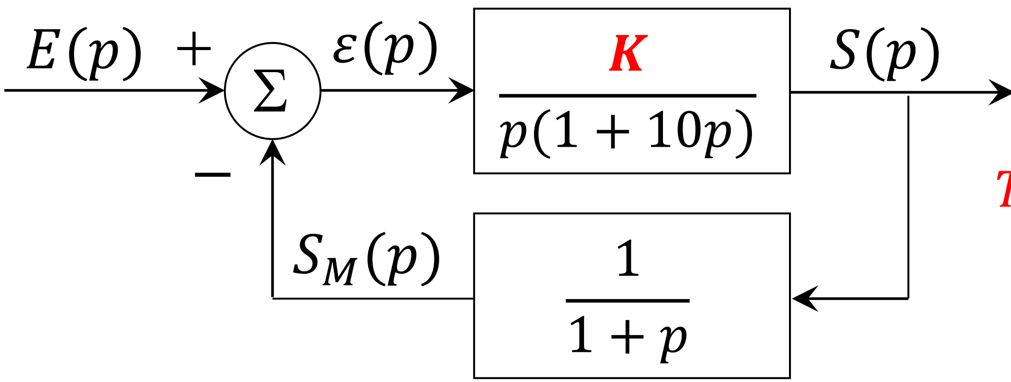
$nb_l = 4 + 1$

1ère colonne				
1	1	4	0	Coefficients de D(p)
2	4	0	0	
-1	4			Coefficients calculés
12	0			
4				

INSTABLE

ici il y a 2 pôles à partie réelle positive

$$\begin{cases} p_1 = -2 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = 0{,}5 + 1{,}32.j \\ p_4 = 0{,}5 - 1{,}32.j \end{cases}$$



$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K.(1+p)}{K + p + 11p^2 + 10p^3}$$

$$\boldsymbol{D(p) = 10p^3 + 11p^2 + p + K}$$

CN : Vérifiée si $\boldsymbol{K > 0}$

$$nb_l = 3 + 1$$

1ère colonne				
10	1	0	0	Coefficients de D(p)
11	K	0	0	
$1 - K\frac{10}{11}$	0			Coefficients calculés
K	0			

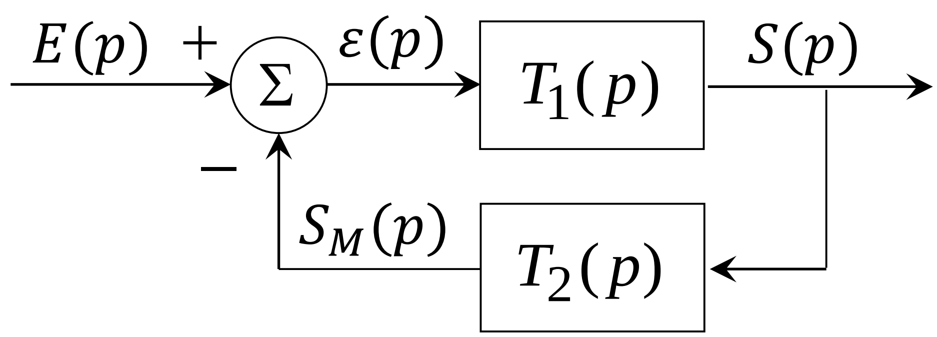
STABLE

pour $\boldsymbol{0 < K < \frac{11}{10}}$

$$\boldsymbol{K_{lim} = 1,1}$$

Critère graphique de stabilité : Critère du revers

- Ce critère concerne **uniquement les systèmes asservis** qui possèdent une fonction de transfert de boucle $\boldsymbol{B(p)}$ ayant **des pôles et des zéros à partie réelle négative**.
- Ici on suppose connaître le tracé de $\boldsymbol{B(p)}$.



$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{T_1(p)}{1 + T_1(p).T_2(p)} \qquad B(p) = \frac{S_M(p)}{\varepsilon(p)} = T_1(p).T_2(p)$$

Critère graphique de stabilité : Critère du revers

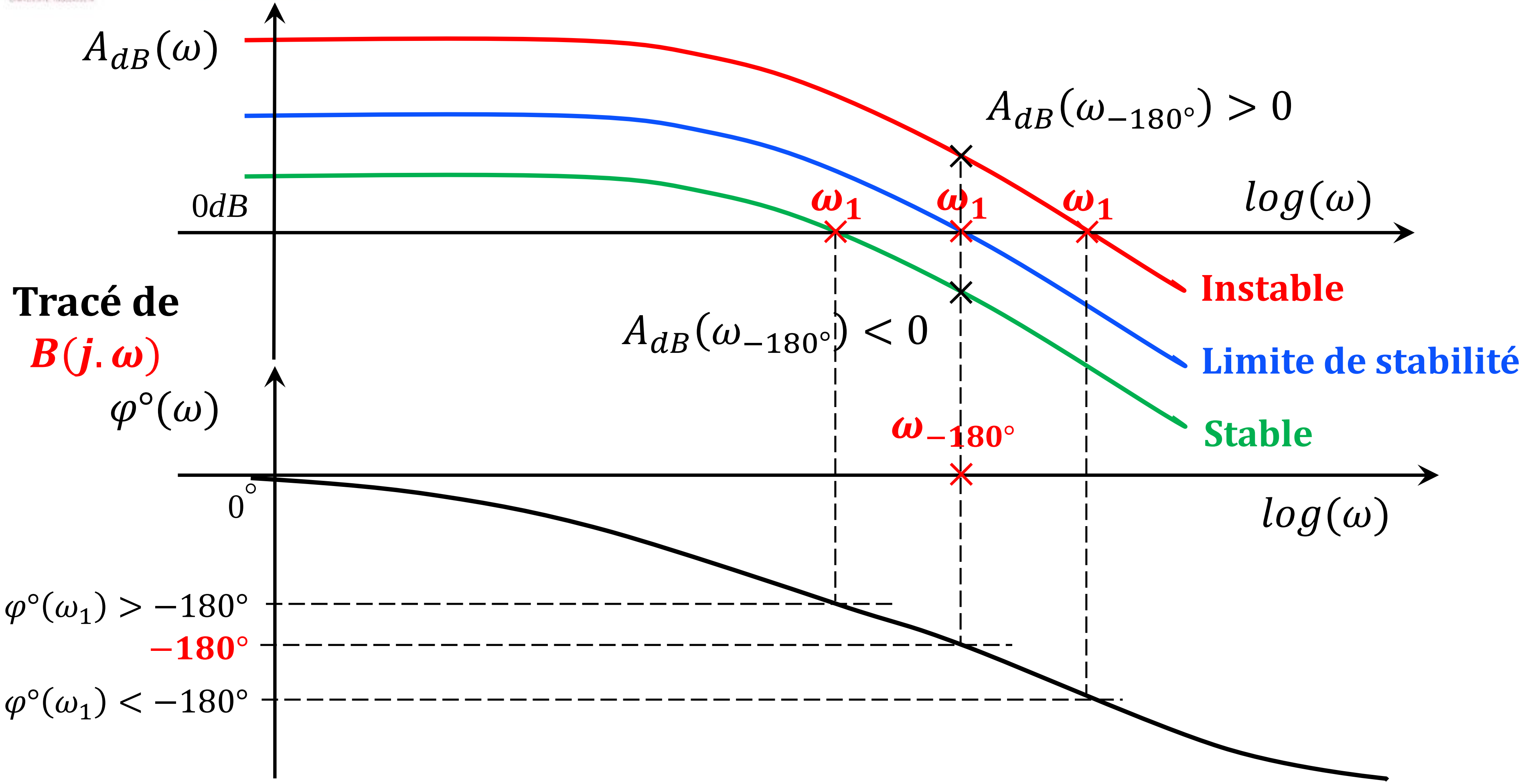
- La stabilité du système asservi $T(p)$ ne dépend que des racines de l'équation $1 + T_1(p).T_2(p) = 0$ ou $B(p) = -1$.

- Le point -1 porte le nom de point critique.

- Dans ce cas, il est nécessaire de tracer la **fonction de transfert de boucle** $B(j.\omega)$ dans le plan de Bode ou de Nichols et de regarder son **positionnement par rapport au point critique** $(-180°; 0dB)$.

Critère du revers dans le plan de Bode

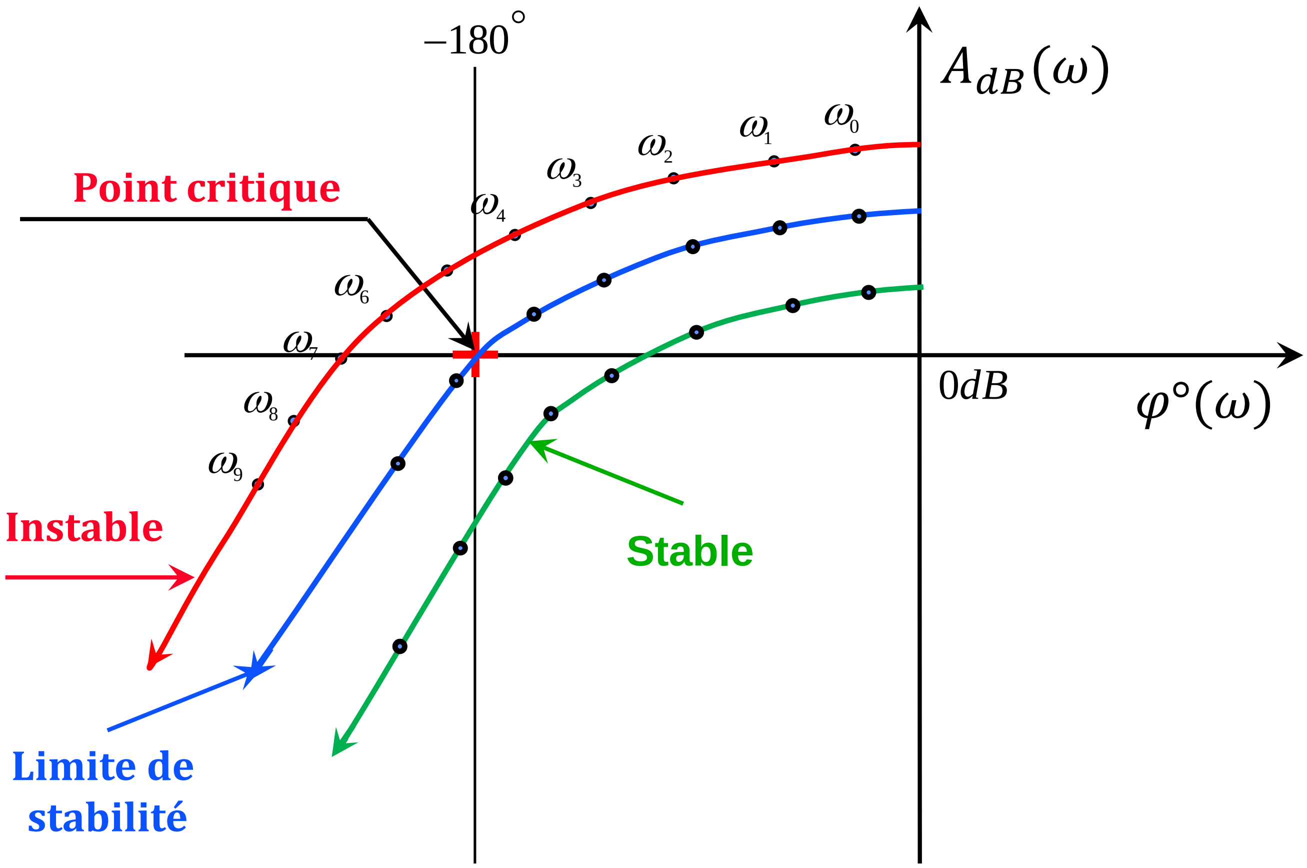
Tracé de $B(j.\omega)$



- **Définition :** Le système asservi $T(p)$ est stable, si la fonction de transfert de boucle $B(j.\omega)$ vérifie : $\begin{cases} \varphi°(\omega_1) > -180° \\ A_{dB}(\omega_{-180°}) < 0\ dB \end{cases}$.

Critère du revers dans le plan de Nichols

Tracé de $\boldsymbol{B(j.\omega)}$



- **Définition :** Le système asservi $T(p)$ est stable, si en parcourant le lieu de transfert de boucle $B(j\omega)$ dans le sens des **pulsations croissantes**, on laisse le point critique ($-180°; 0dB$) **à droite**.

- **Remarque :** Le système asservi $T(p)$ doit être **impérativement stable** malgré :
  - des **fluctuations** sur les paramètres,
  - des **incertitudes** d'identification.

Marge de gain :

$$M_A = \frac{1}{A(\omega_{-180^\circ})} \quad \text{ou} \quad M_{A_{dB}} = -A_{dB}(\omega_{-180^\circ})$$

- On appelle ω_{-180° la pulsation pour laquelle le déphasage de boucle est égal à $-180°$.
- $A(\omega_{-180^\circ})$ est donc le gain linéaire de boucle pour la pulsation ω_{-180° et $A_{dB}(\omega_{-180^\circ})$ le gain logarithmique de boucle pour cette pulsation.
- M_A correspond à **l'augmentation du gain linéaire de boucle** pour amener le système asservi à la **limite de stabilité**.
- $M_{A_{dB}}$ correspond au **gain logarithmique de boucle à ajouter** pour amener le système asservi à la **limite de stabilité**.

Marges de sécurité

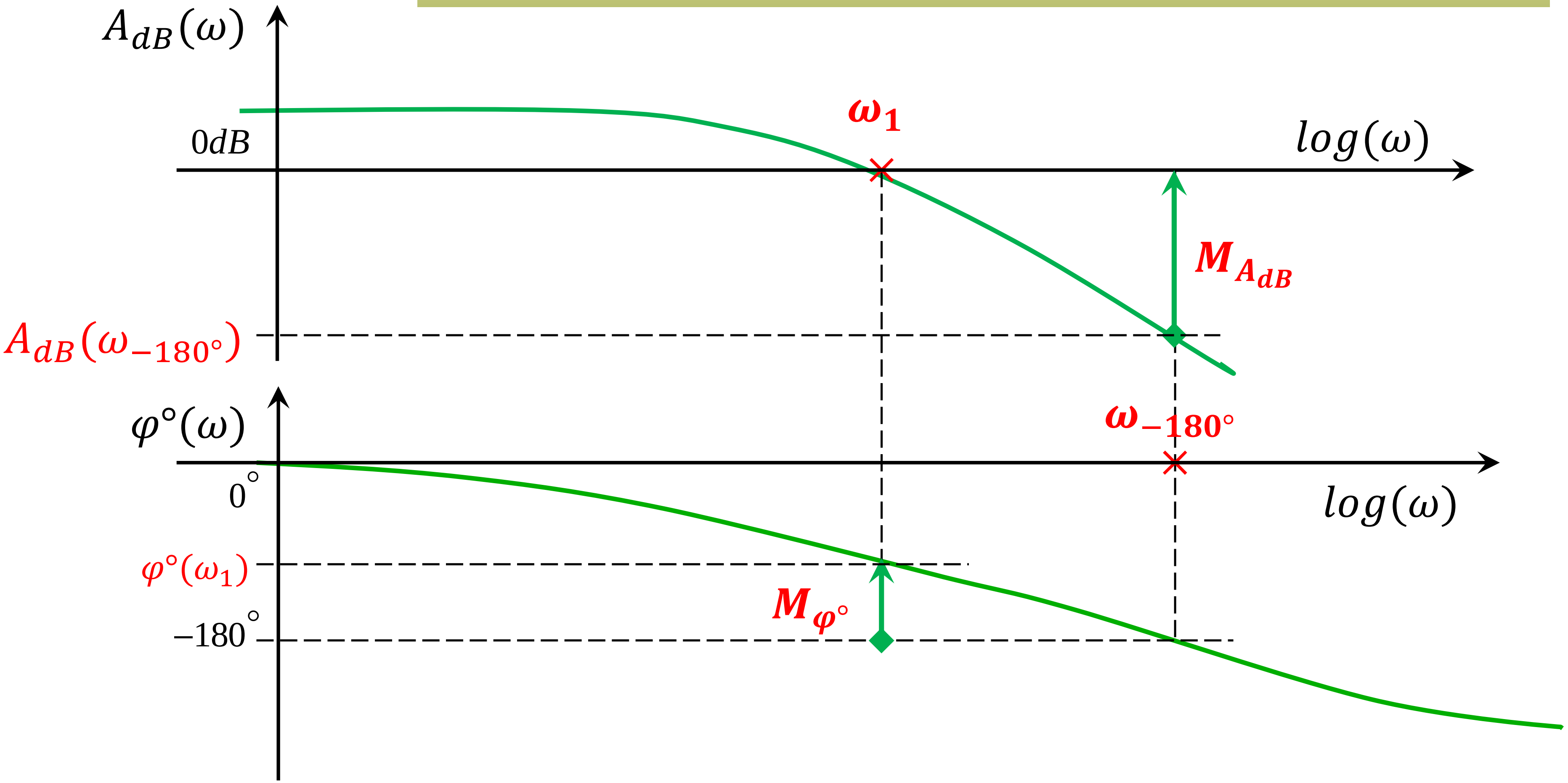
Marge de phase :

$$M_{\varphi^\circ} = 180° + \varphi^\circ(\omega_1)$$

- On appelle ω_1 la pulsation pour laquelle le **gain linéaire de boucle est égal à 1** ou le **gain logarithmique de boucle est égal à 0dB**.
- $\varphi^\circ(\omega_1)$ est donc le déphasage de boucle pour la pulsation ω_1.
- M_{φ° correspond au **déphasage supplémentaire** pour amener le système asservi à la **limite de stabilité**.

- **Remarque :**
  - Si $M_{A_{dB}}$ **et** M_{φ° sont **positives** le système asservi est **stable** .
  - Si $M_{A_{dB}}$ **et** M_{φ° sont **nulles** le système asservi est à la **limite de stabilité** .
  - Si $M_{A_{dB}}$ **ou** M_{φ° est **négative** le système asservi est **instable** .

Marges de phase et de gain dans le plan de Bode



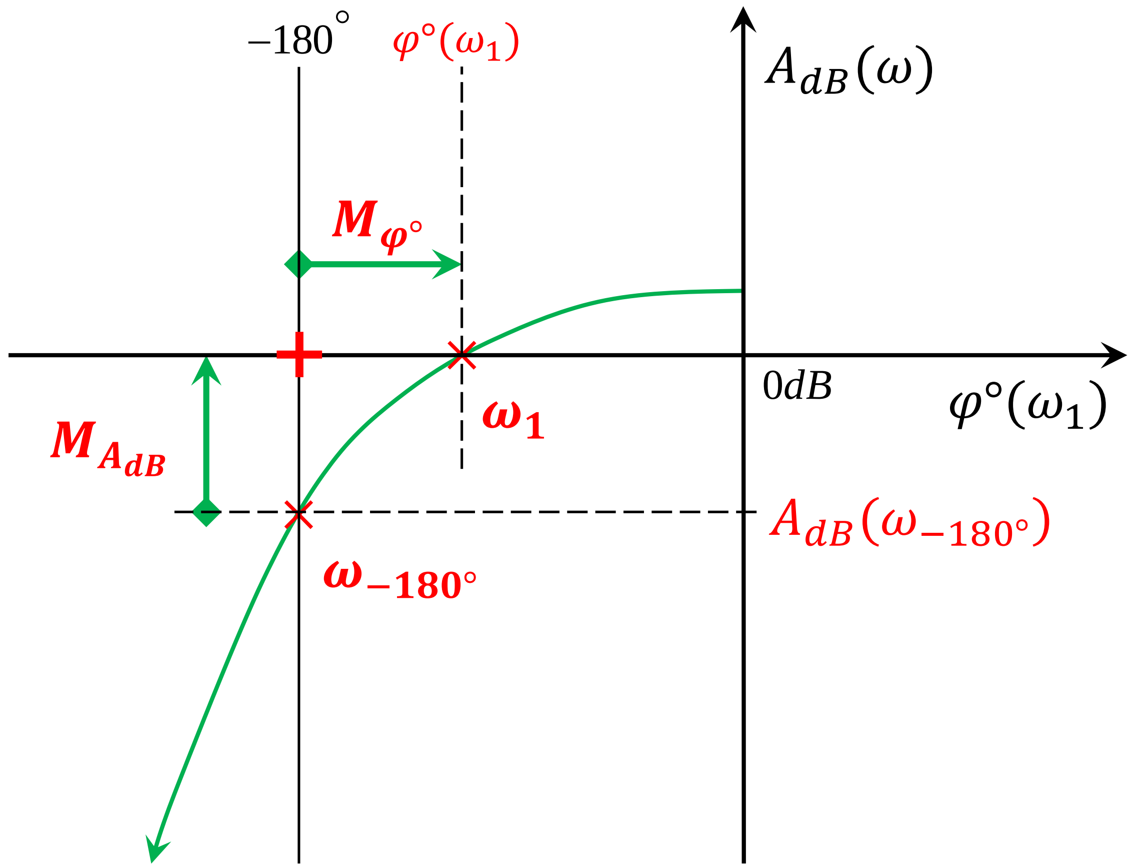
$$M_{\varphi°} = \varphi°(\omega_1) - (-180°)$$

$$\boldsymbol{M_{\varphi°} = 180° + \varphi°(\omega_1)}$$

$$M_{A_{dB}} = 0\text{dB} - A_{dB}(\omega_{-180°})$$

$$\boldsymbol{M_{A_{dB}} = -A_{dB}(\omega_{-180°})}$$

Marges de phase et de gain dans le plan de Nichols



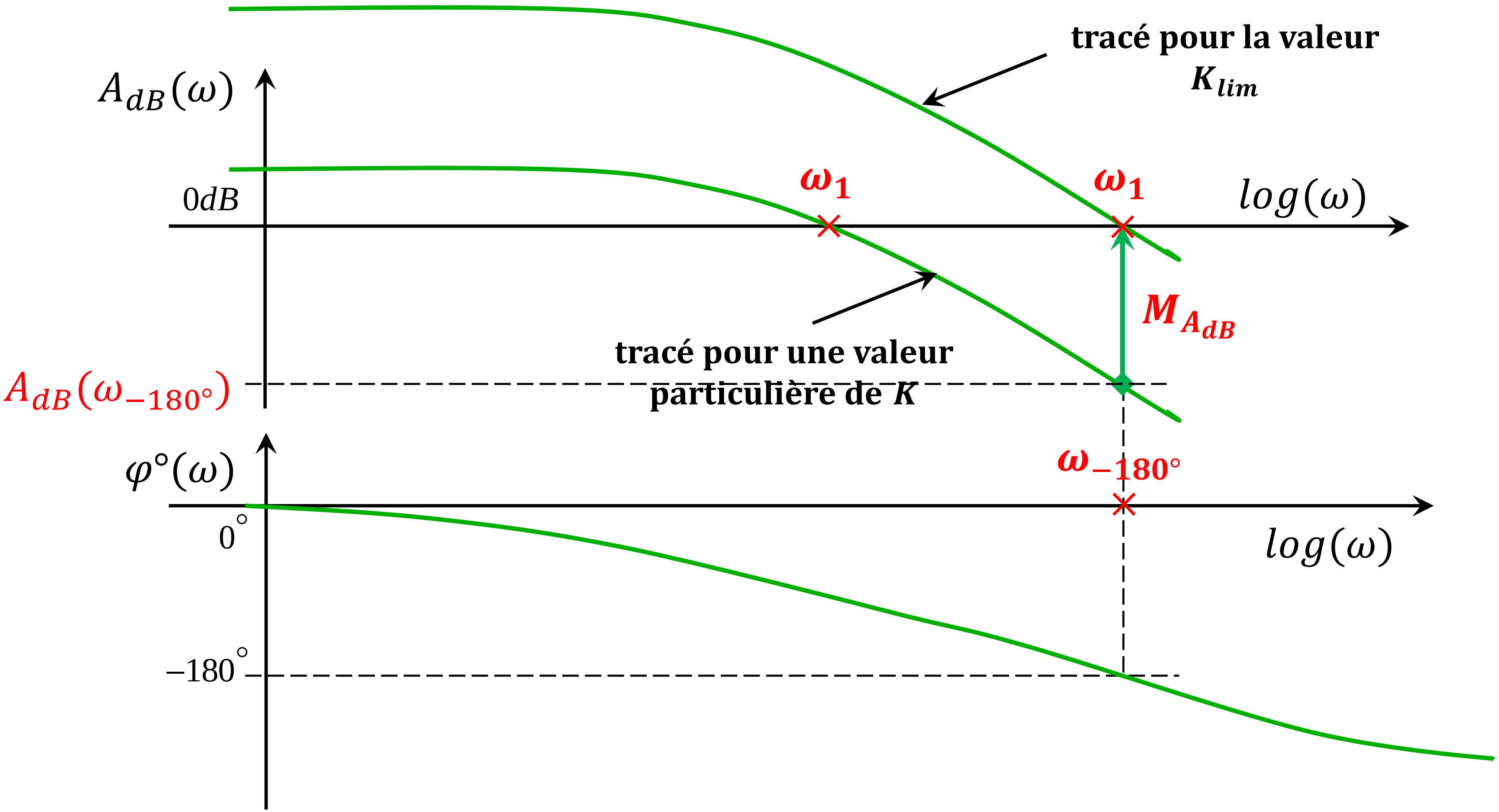
$$M_{\varphi^{\circ}} = \varphi^{\circ}(\omega_1) - (-180^{\circ})$$

$$\boldsymbol{M_{\varphi^{\circ}} = 180^{\circ} + \varphi^{\circ}(\omega_1)}$$

$$M_{A_{dB}} = 0\text{dB} - A_{dB}(\omega_{-180^{\circ}})$$

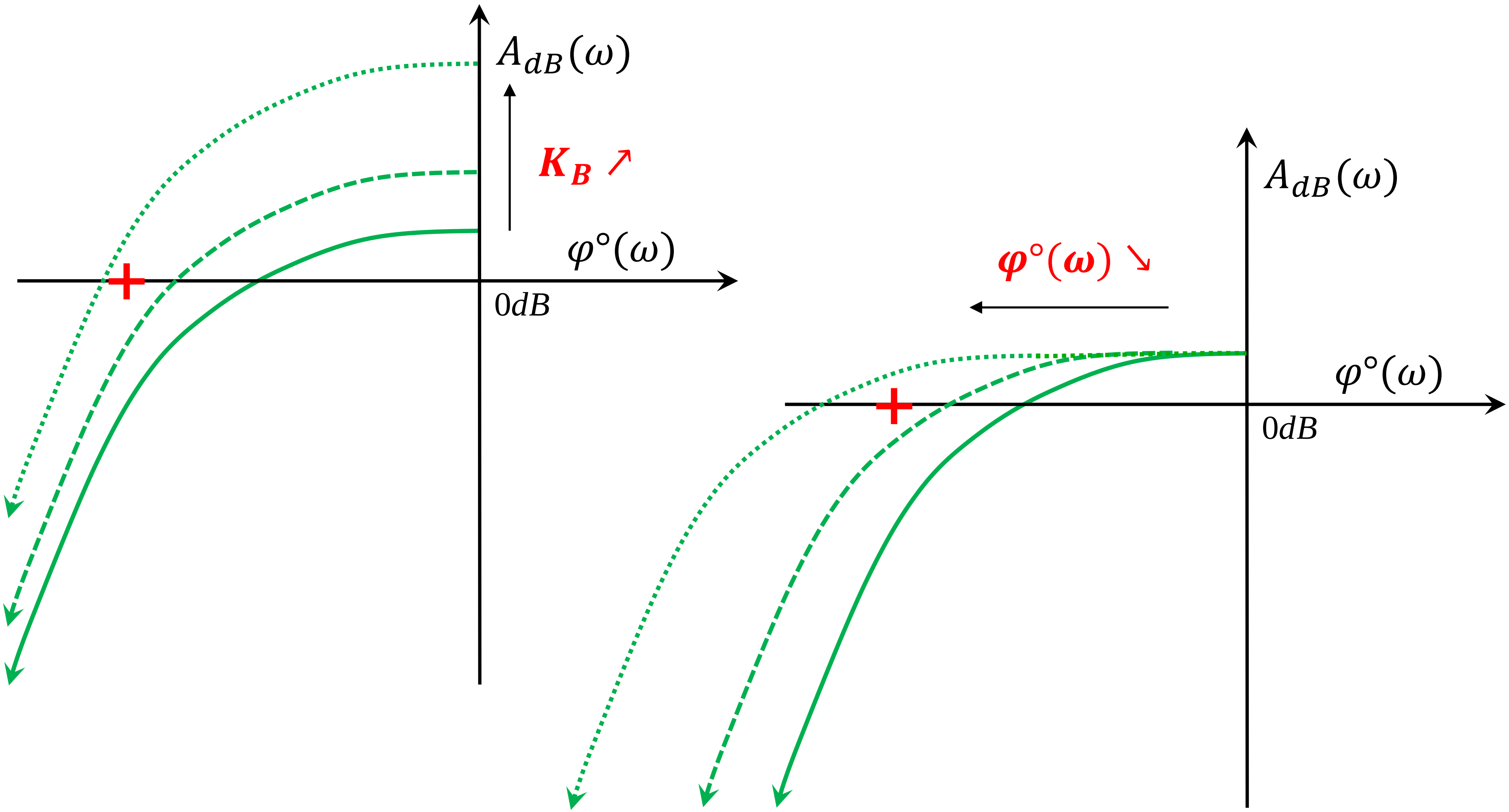
$$\boldsymbol{M_{A_{dB}} = -A_{dB}(\omega_{-180^{\circ}})}$$

Détermination graphique du gain K_{lim}



$$20.\log(K_{lim}) = 20.\,log(K) + M_{A_{dB}} \quad \Rightarrow \quad K_{lim} = 10^{\frac{20.log(K)+M_{A_{dB}}}{20}}$$

Influence de la variation du gain K_B et du déphasage $\varphi°(\omega)$ sur la stabilité du système bouclé



Conclusion sur la stabilité des systèmes bouclés

- **Toute augmentation du gain de boucle engendre :**
  - **une diminution de la stabilité,**
  - **et dans certains cas à une instabilité.**

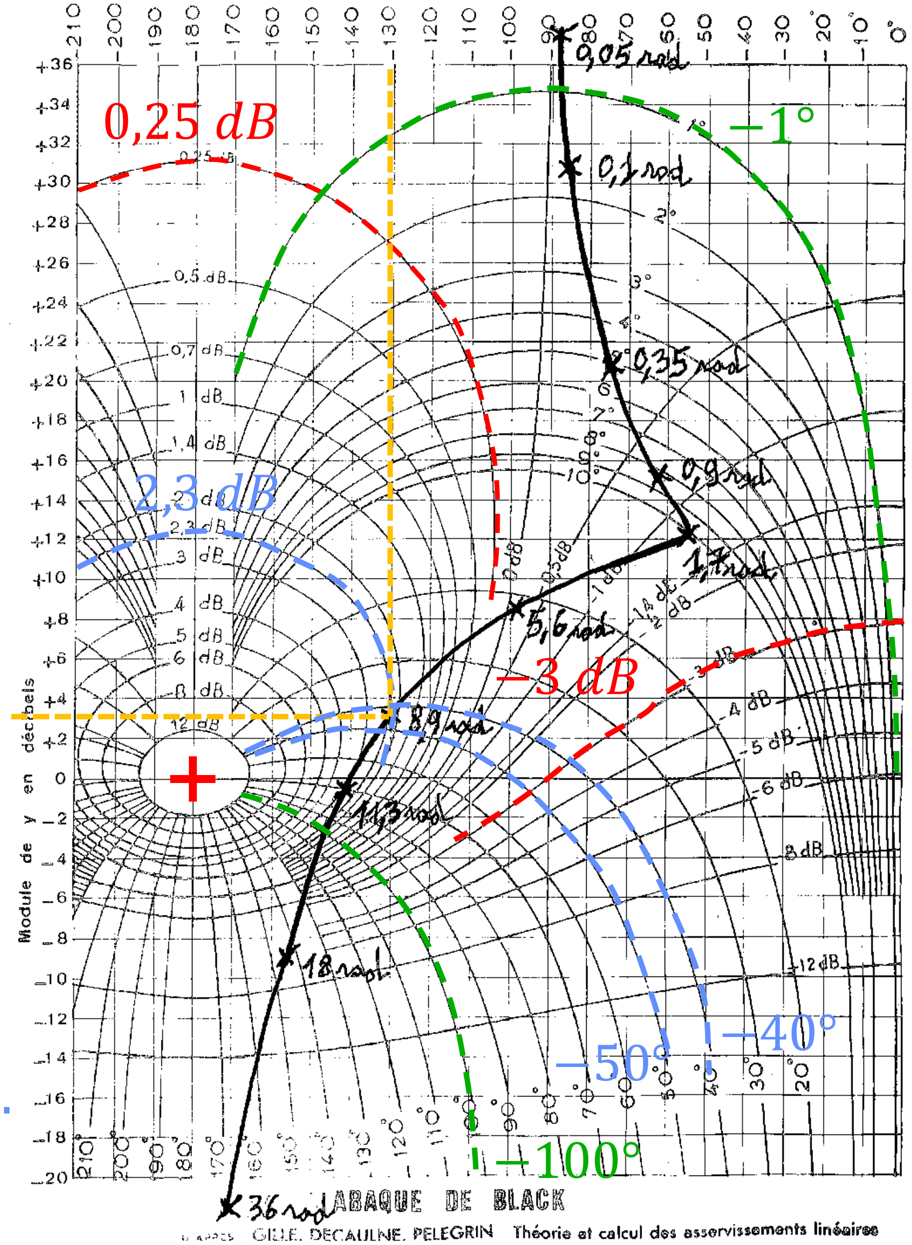
- **Toute diminution du déphasage de boucle engendre :**
  - **une diminution de la stabilité,**
  - **et dans certains cas à une instabilité.**

Plan de Nichols et Abaque de Black

- L'abaque de Black est formé de courbes **iso-gain** et **iso-phase**. Cet abaque permet, à partir de la connaissance du lieu de transfert de boucle d'un système à **retour unitaire** d'obtenir le lieu de transfert du système asservi.

Exemple pour : $\boldsymbol{\omega = 8,9\ rad/s}$

- Gain $\rightarrow 2,3\ dB$.
- Déphasage $\rightarrow$ $entre\ -50°\ et\ -40°$.



Détermination du gain statique K_S

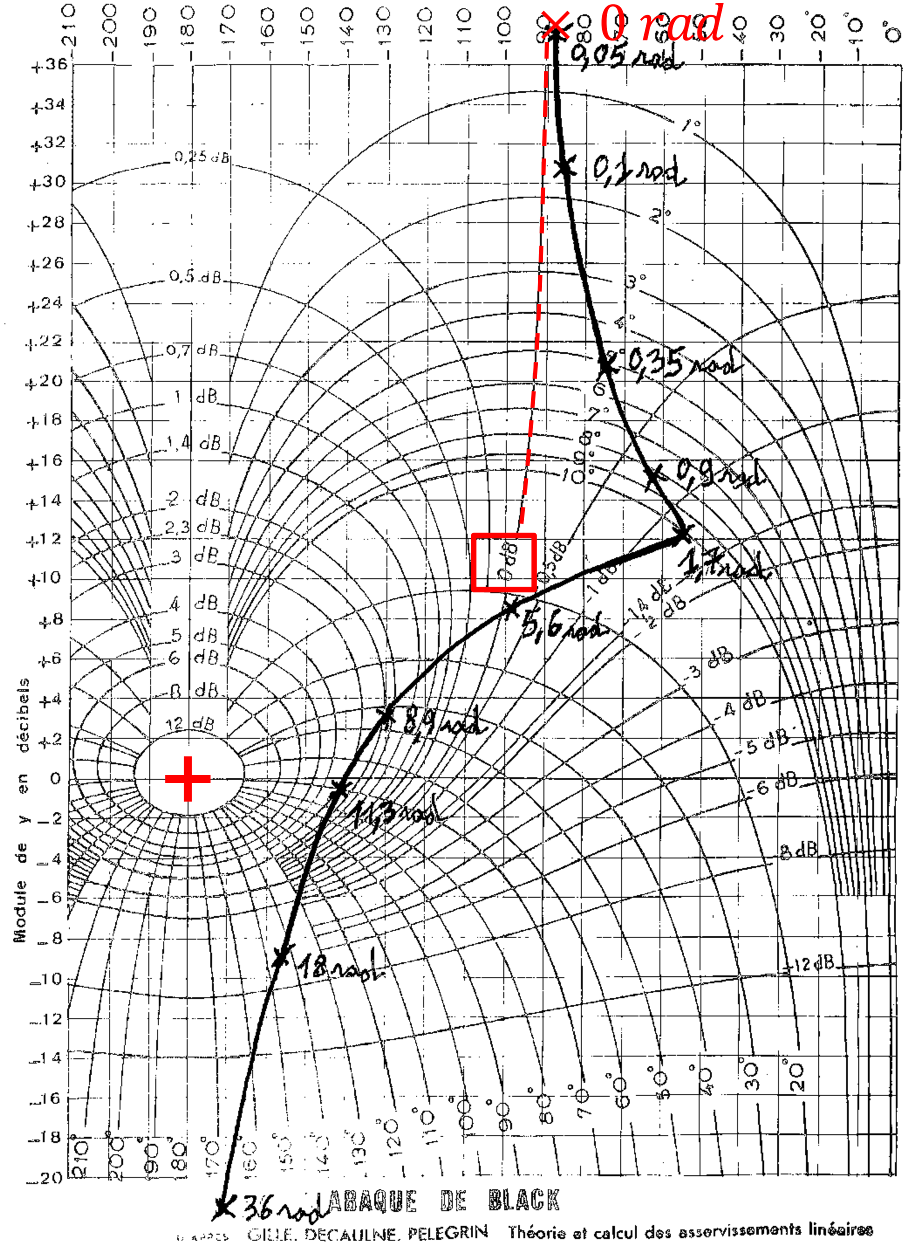
- Pour déterminer $A_{dB}(0)$, il faut chercher à quelle courbe **iso-gain** la pulsation $\omega = 0\, rad/s$ **est proche**.

$$A_{dB}(0) = 0dB$$

$$A_{dB}(0) = 20.\log(K_S)$$

$$K_S = 10^{\left(\frac{A_{dB}(0)}{20}\right)}$$

$$K_S = 1$$



Détermination de ω_R et du gain maximum $A_{dB}(\omega_R)$

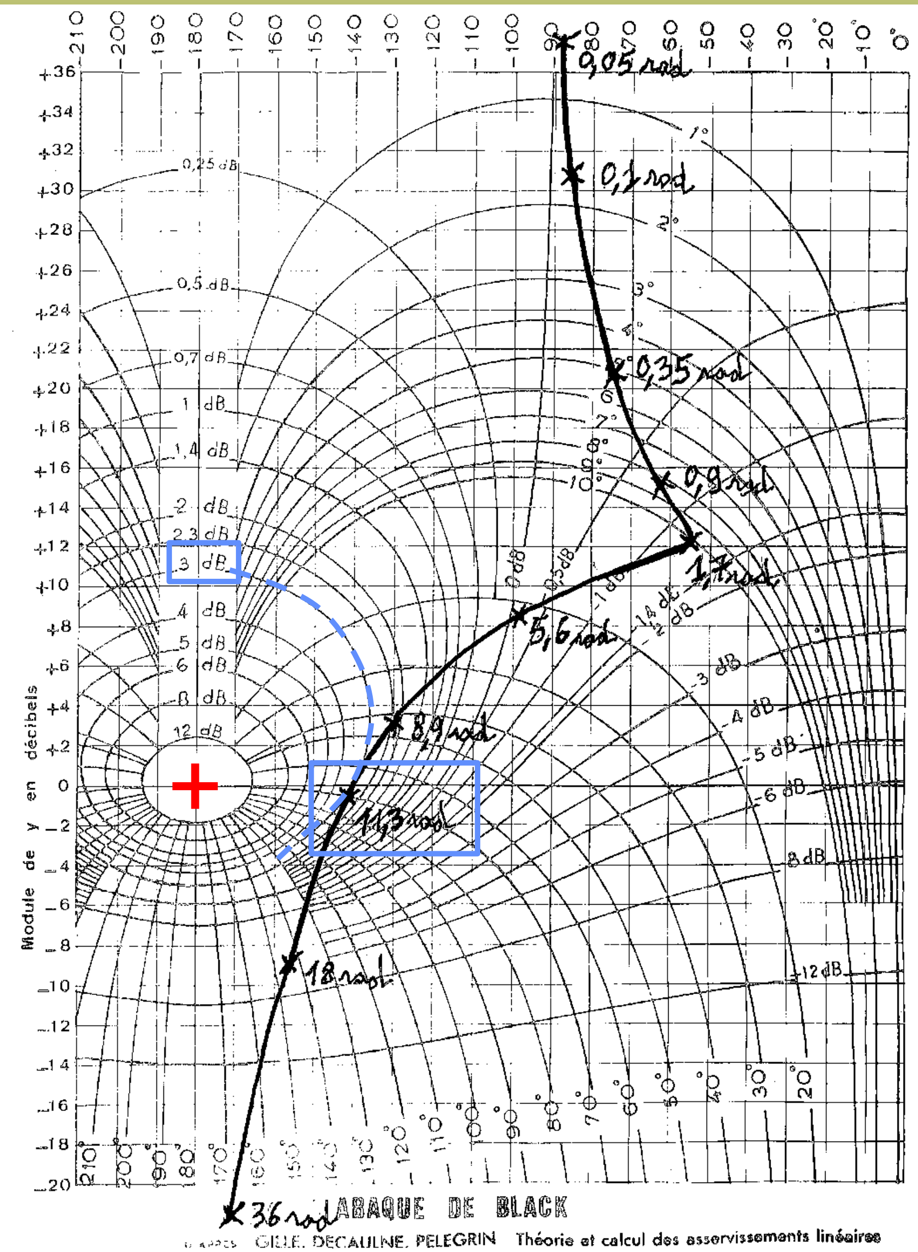
- Pour déterminer ω_R, il faut chercher à quelle courbe **iso-gain** le lieu de transfert de boucle est **tangent**.
- Pour déterminer $A_{dB}(\omega_R)$, il suffit de lire la valeur du gain sur cette courbe **iso-gain**.

$$\omega_R = 11{,}3\ rad/s$$

$$A_{dB}(\omega_R) = 3dB$$

$$Q_{dB} = A_{dB}(\omega_R) - A_{dB}(0)$$

$$Q_{dB} = 3 - 0 = 3\ dB$$



Détermination de la pulsation ω_{-6db}

- Pour déterminer $\boldsymbol{\omega_{-6dB}}$ (pulsation pour laquelle le gain vaut $\boldsymbol{A_{dB}(0) - 6dB = 0 - 6dB = -6dB}$) dans notre cas, il suffit donc de rechercher l'**intersection** du lieu de transfert de boucle avec la courbe **iso-gain** $\boldsymbol{-6dB}$; ce point détermine la pulsation $\boldsymbol{\omega_{-6dB}}$.

$$\omega_{-6dB} = 18\, rad/s$$

$$BP_{-6dB} = [0 \quad 18\, rad/s\,]$$