

Chapitre 2, Partie 1 : Systèmes de base et Simplification de schéma-bloc

Système du 1^{er} ordre : réponse indicielle

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

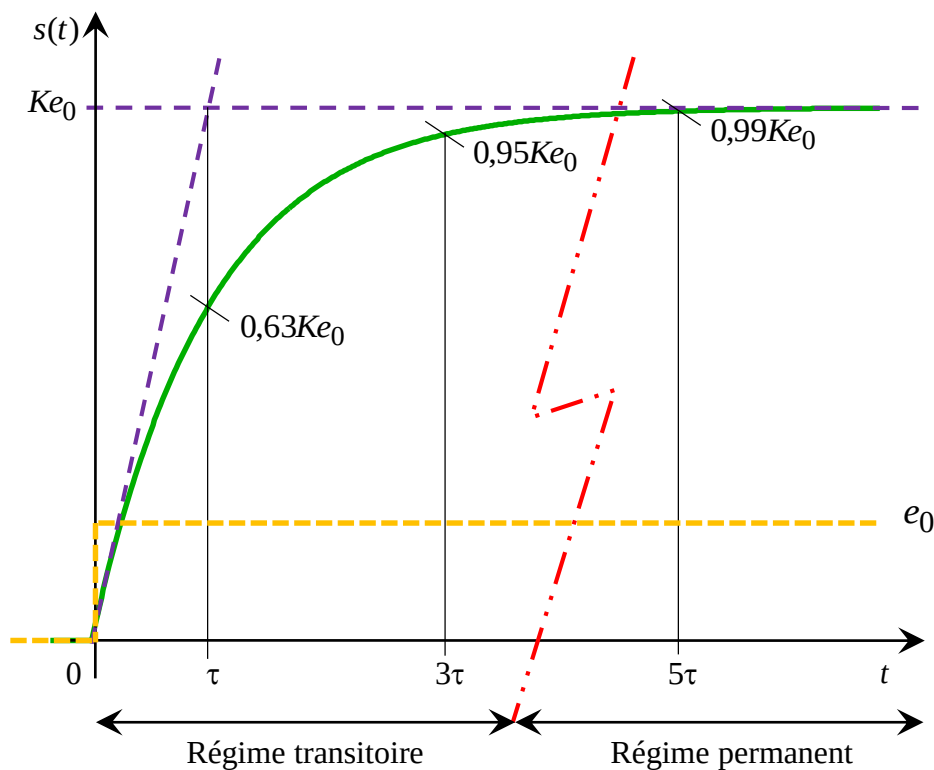
✓ **K** : gain statique

✓ **τ** : constante de temps

$$e(t) = e_0 u(t)$$

$$s(t) = K e_0 (1 - e^{-t/\tau}) u(t)$$

$$s_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K e_0$$



• temps de réponse à x% :

$$t_{r5\%} = \tau \ln(20) \approx 3 \tau$$

$$t_{r1\%} = \tau \ln(100) \approx 4,6 \tau$$

• temps de montée à 10% :

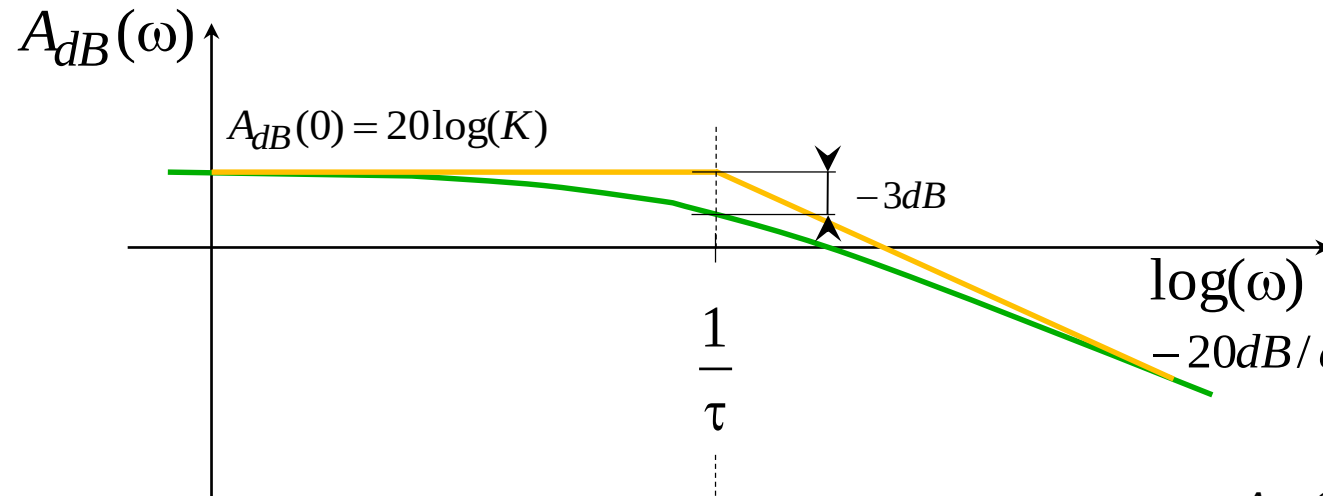
$$t_{m10\%} = \tau \ln(9) \approx 2,2 \tau$$

Système du 1^{er} ordre : réponse fréquentielle

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$$

$$s(t) = s_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

En régime permanent seulement !!!

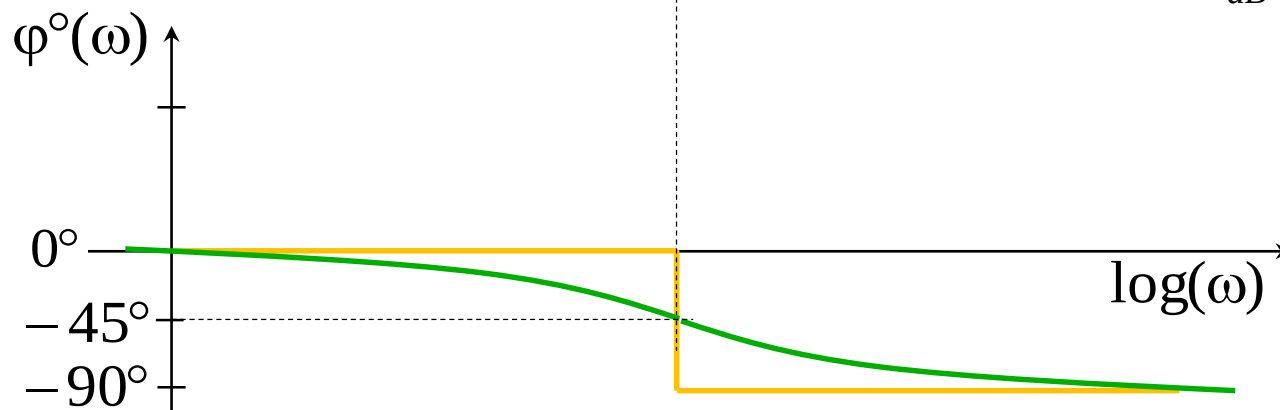


- gain dynamique linéaire

$$A(\omega) = \frac{s_0(\omega)}{e_0} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

- gain dynamique logarithmique

$$A_{dB}(\omega) = 20\log(K) - 10\log(1 + (\tau\omega)^2)$$



- déphasage

$$\varphi^o(\omega) = -\text{Arc tan}(\tau\omega)$$

Système du 2^{ème} ordre : réponse indicielle

$$T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

- ✓ **K** : gain statique
- ✓ **ζ** : coefficient d'amortissement
- ✓ **ω_n** : pulsation propre

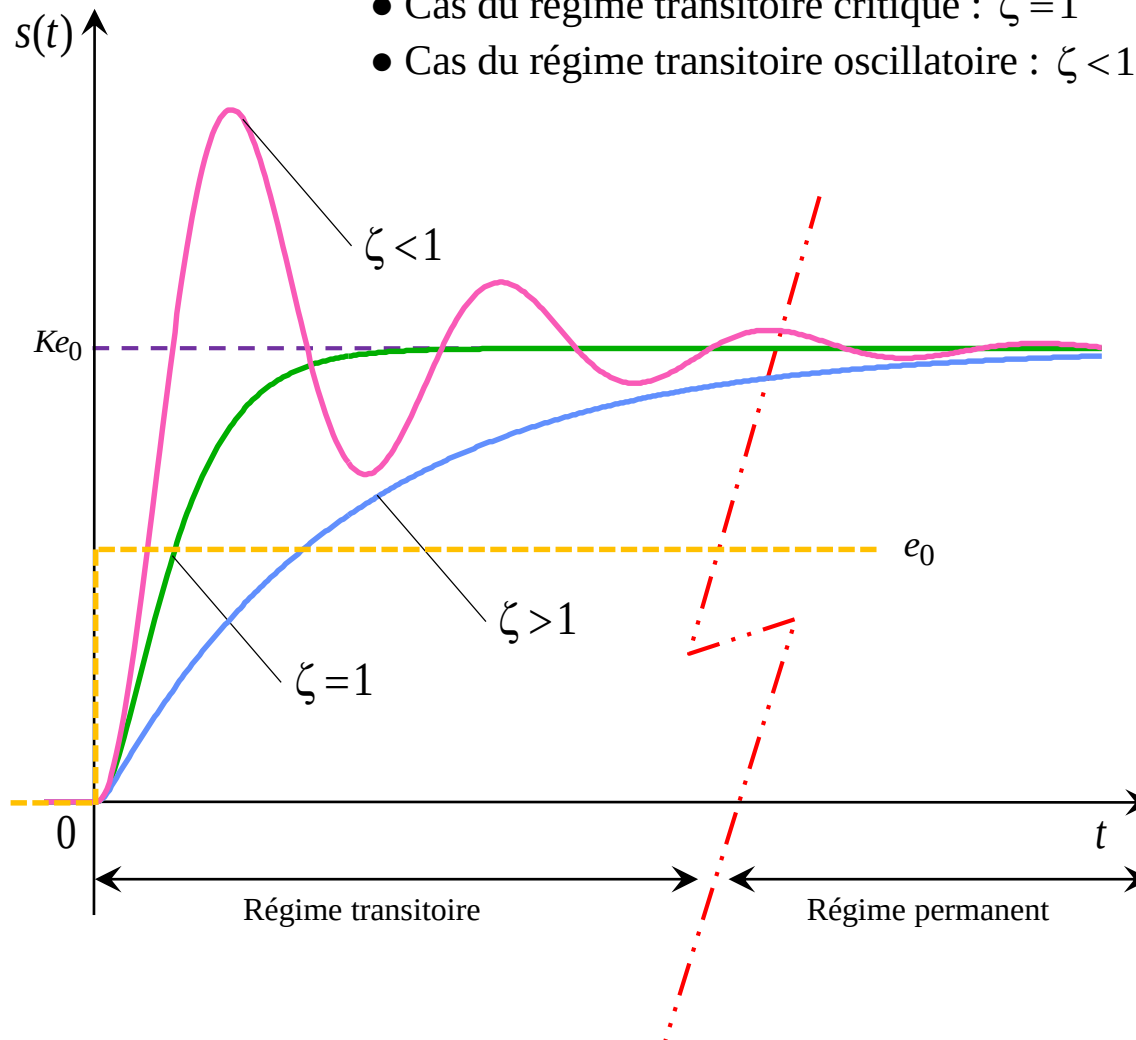
$$e(t) = e_0 u(t)$$

$$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K e_0$$

$$s(t) = \begin{cases} \bullet K e_0 \left(1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \operatorname{sh}(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t + \Psi) \right) u(t) & \text{si } \zeta > 1 \\ \text{avec } \operatorname{sh}(\Psi) = \sqrt{\zeta^2 - 1} \text{ et } \operatorname{ch}(\Psi) = \zeta \\ \bullet K e_0 (1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}) u(t) & \text{si } \zeta = 1 \\ \bullet K e_0 \left(1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \Psi) \right) u(t) & \text{si } \zeta < 1 \\ \text{avec } \sin(\Psi) = \sqrt{1 - \zeta^2} \text{ et } \cos(\Psi) = \zeta \end{cases}$$

Système du 2^{ème} ordre : réponse indicielle

- Cas du régime transitoire apériodique : $\zeta > 1$
- Cas du régime transitoire critique : $\zeta = 1$
- Cas du régime transitoire oscillatoire : $\zeta < 1$



$$\tau_{dom} \approx \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad \text{si } \zeta \leq 1$$

$$\tau_{dom} \approx \frac{2\zeta}{\omega_n} \quad \text{si } \zeta > 1$$

- temps de réponse à x% :

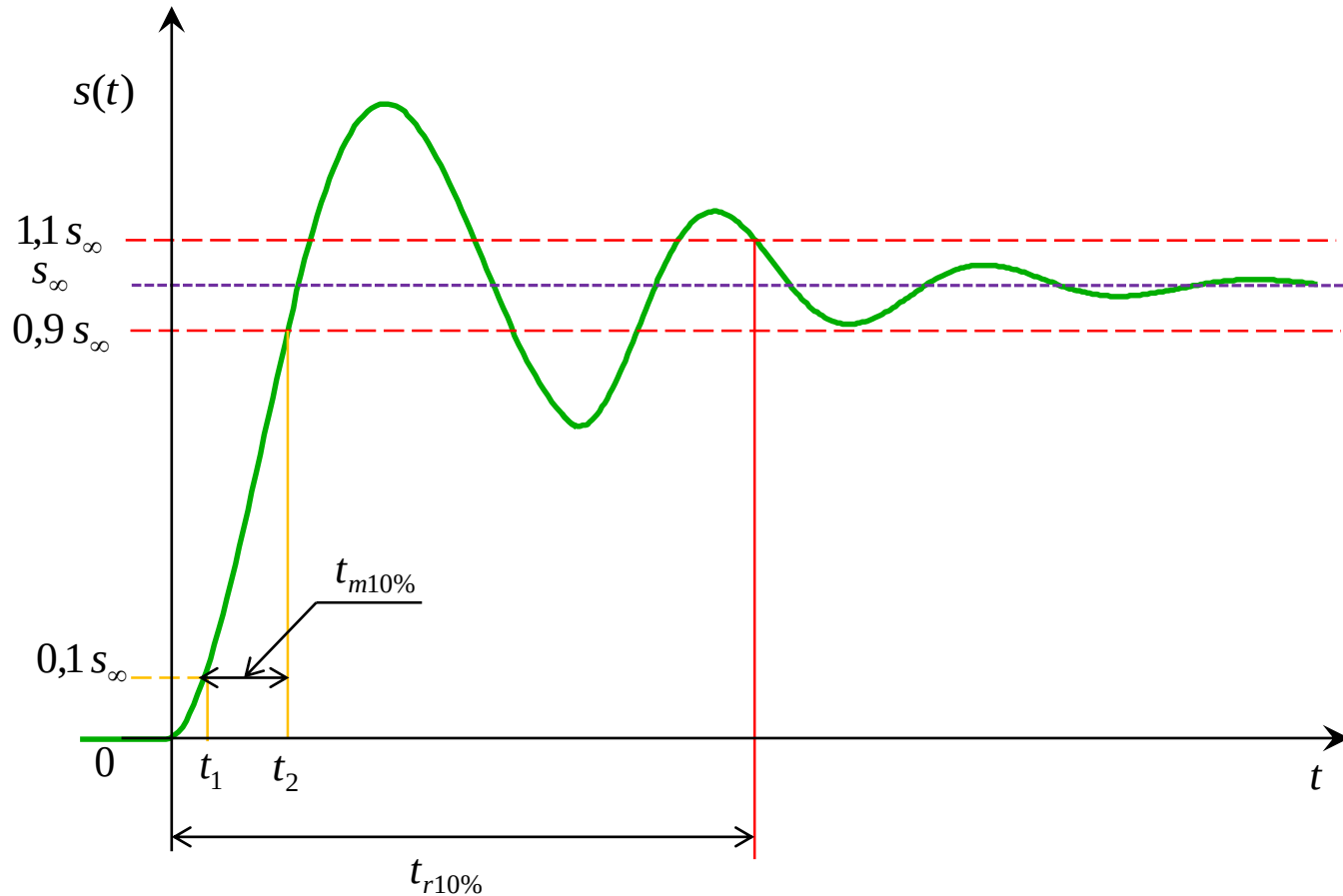
$$t_{r5\%} \approx 3\tau_{dom}$$

$$t_{r1\%} \approx 4,6\tau_{dom}$$

- temps de montée à 10% :

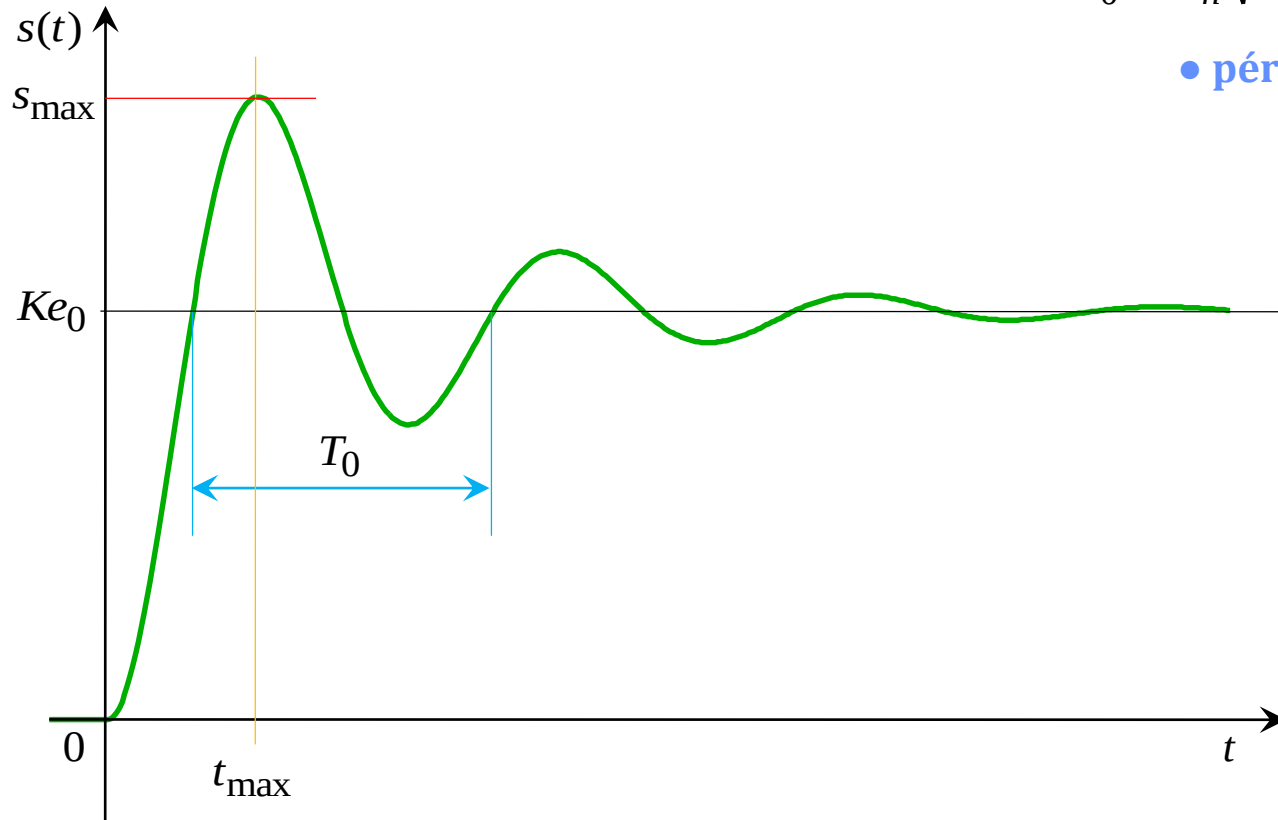
$$t_{m10\%} \approx \frac{1 - 0,4167\zeta + 2,9175\zeta^2}{\omega_n}$$

Système du 2^{ème} ordre : réponse indicielle



Système du 2^{ème} ordre : réponse indicielle

- pulsation des oscillations amorties : $\omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$



- période des oscillations amorties

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- temps du 1^{er} dépassement

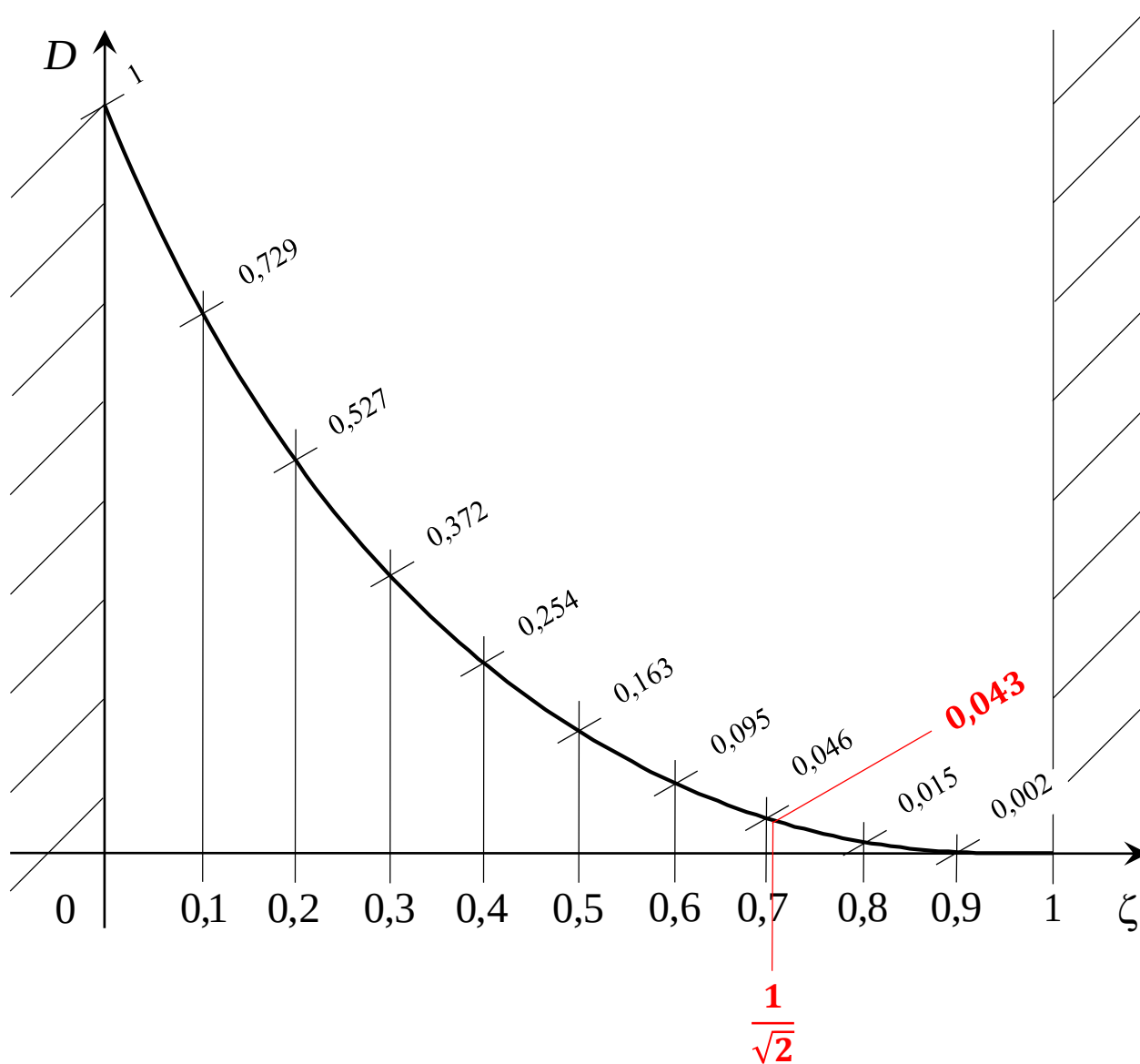
$$t_{\max} = \frac{T_0}{2}$$

- maximum de la sortie

$$s_{\max} = Ke_0 \left(1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right)$$

- dépassement : $D = \frac{s_{\max} - s_{\infty}}{s_{\infty} - s_0} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

Système du 2^{ème} ordre : réponse indicielle



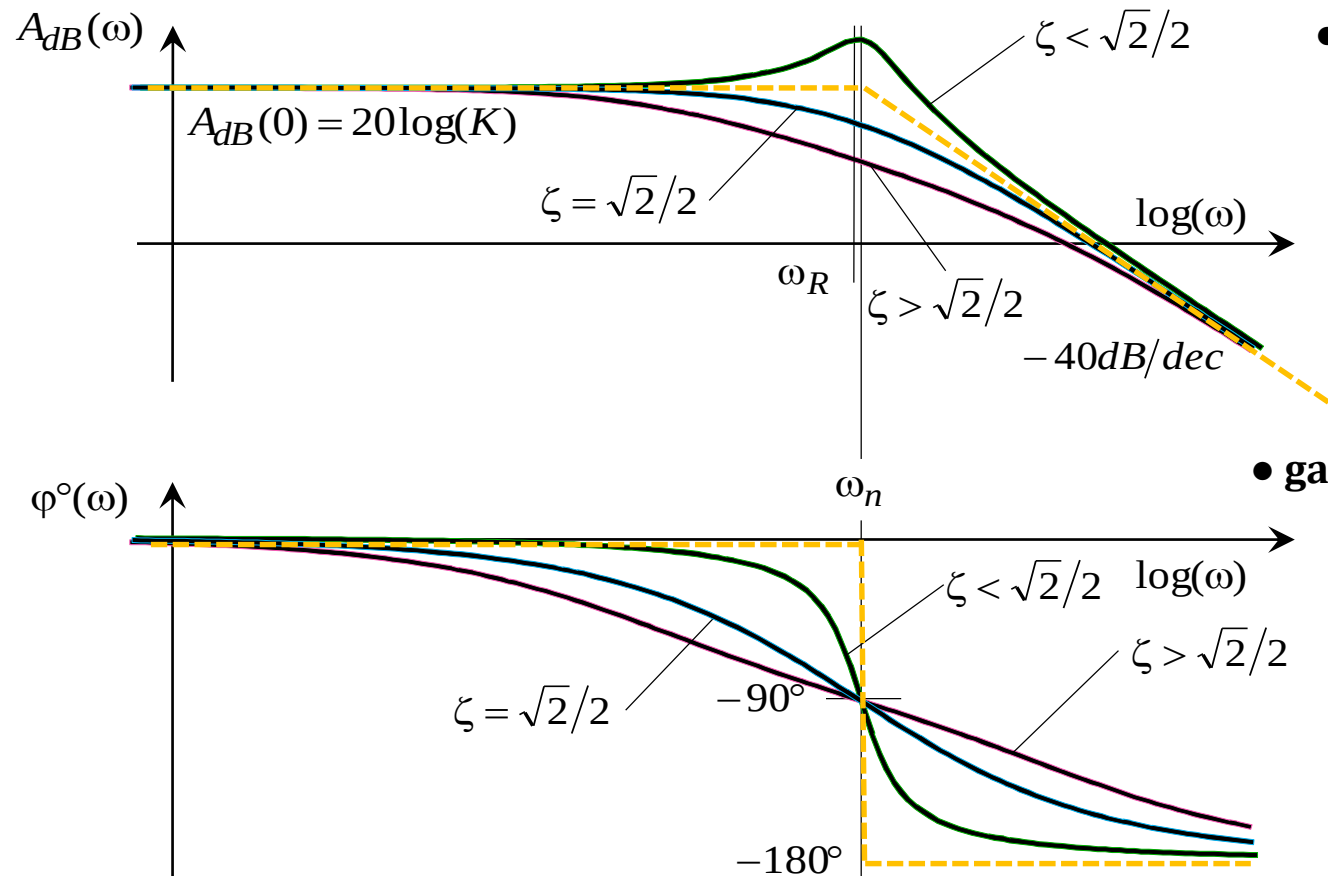
$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(D)}{\pi^2 + \ln^2(D)}}$$

Système du 2^{ème} ordre : réponse fréquentielle

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$$

$$s(t) = s_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

En régime permanent seulement !!!



• gain statique linéaire

$$A_0 = A(0) = K$$

• gain dynamique linéaire à ω_n

$$A(\omega_n) = \frac{K}{2\zeta}$$

• gain dynamique linéaire

$$A(\omega) = \frac{s_0(\omega)}{e_0} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

• déphasage

$$\varphi^\circ(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{Arctan} \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) & \text{si } \omega < \omega_n \\ -90^\circ & \text{si } \omega = \omega_n \\ -\operatorname{Arctan} \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) - 180^\circ & \text{si } \omega > \omega_n \end{cases}$$

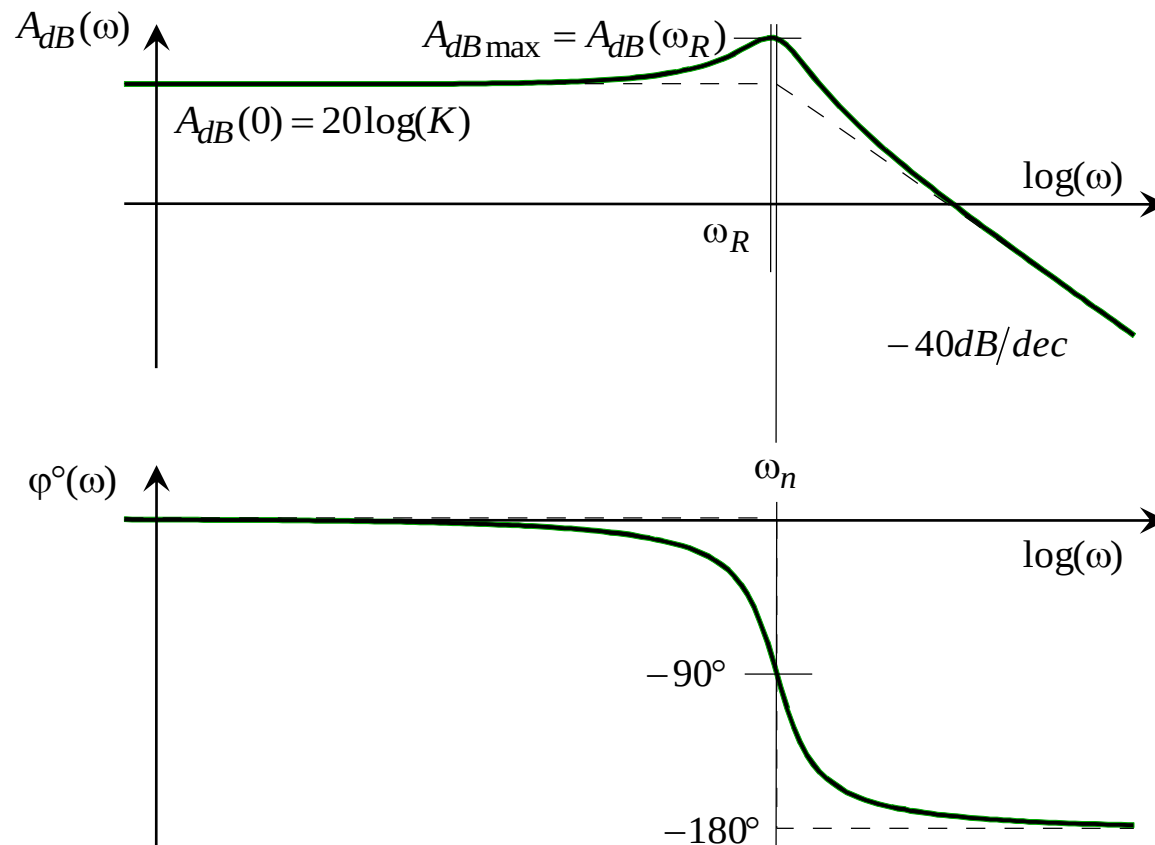
• gain dynamique logarithmique

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log(A(\omega)) = 20 \log(K) - 10 \log \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)$$

Système du 2^{ème} ordre : réponse fréquentielle

$$\zeta < \sqrt{2}/2$$

• pulsation de résonance : $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$



- gain maximal

$$A_{\max} = A(\omega_R) = \frac{K}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- coefficient de surtension

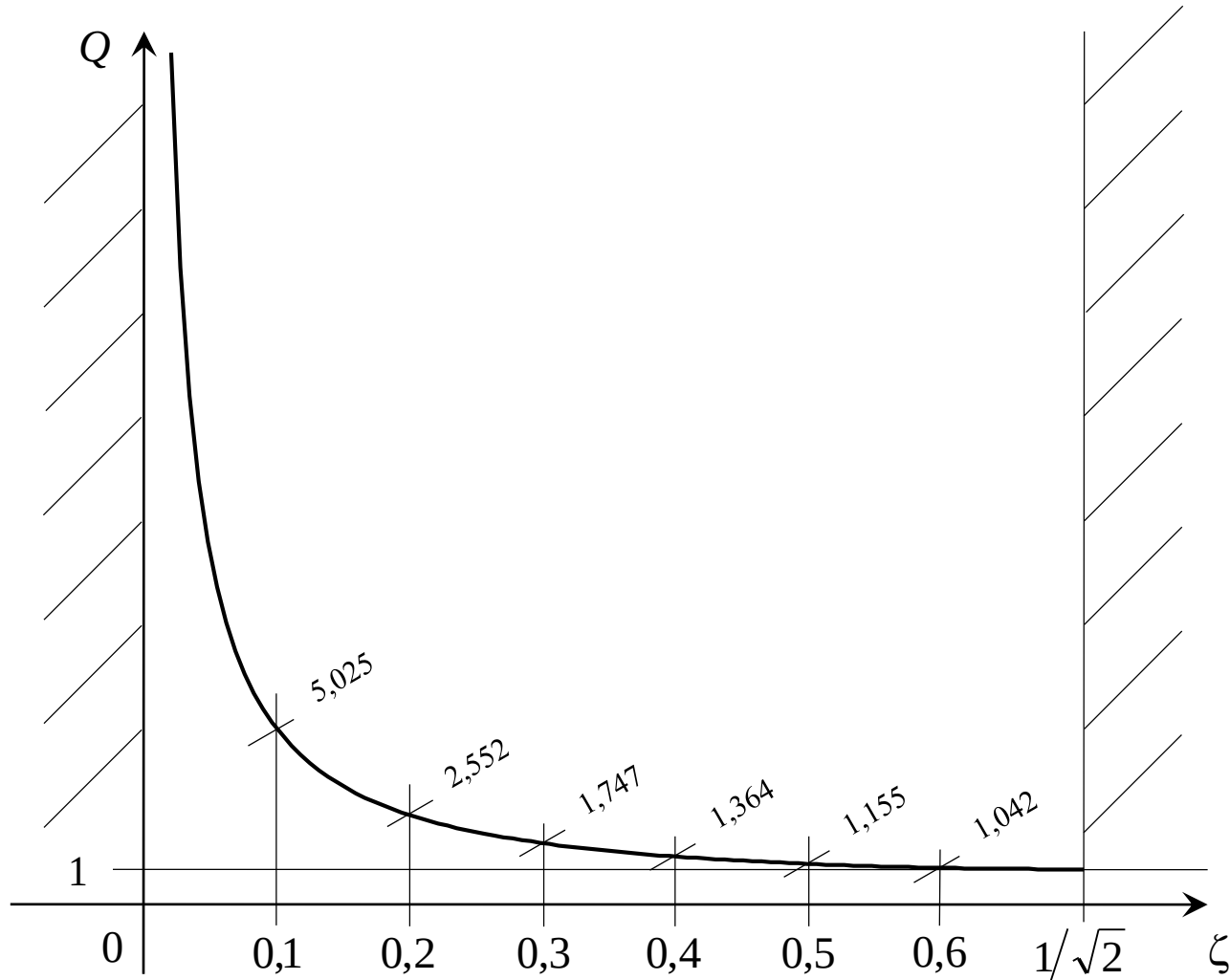
$$Q = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$Q_{dB} = 20 \log(Q) = A_{dB \max} - A_{dB0}$$

- déphasage à ω_R

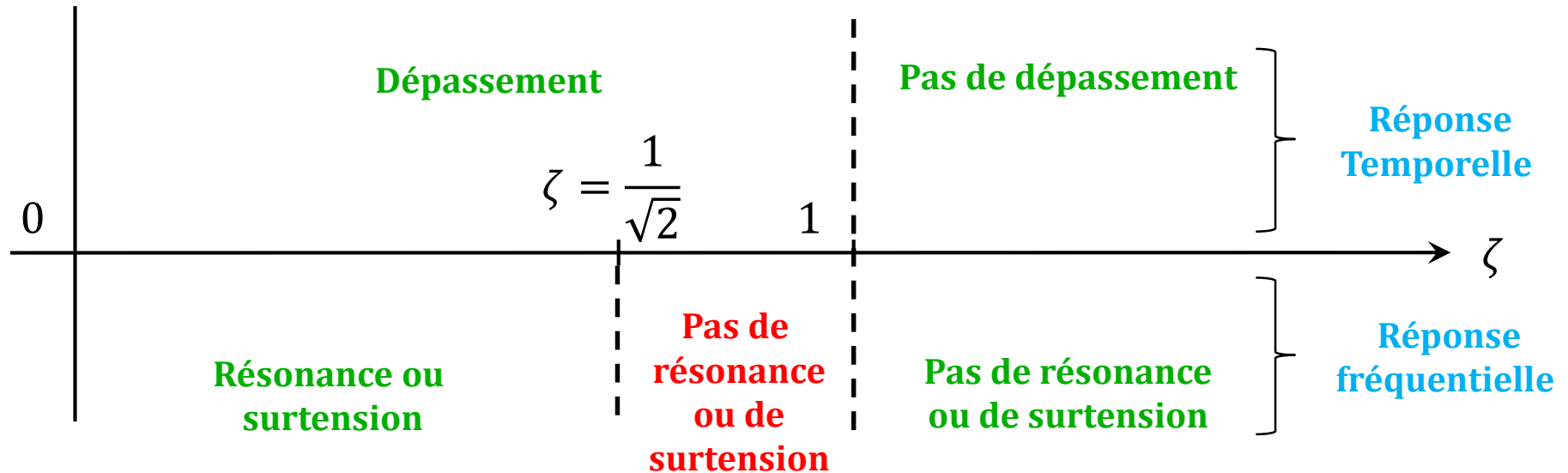
$$\varphi^\circ(\omega_R) = -\text{Arc tan} \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

Système du 2^{ème} ordre : réponse fréquentielle



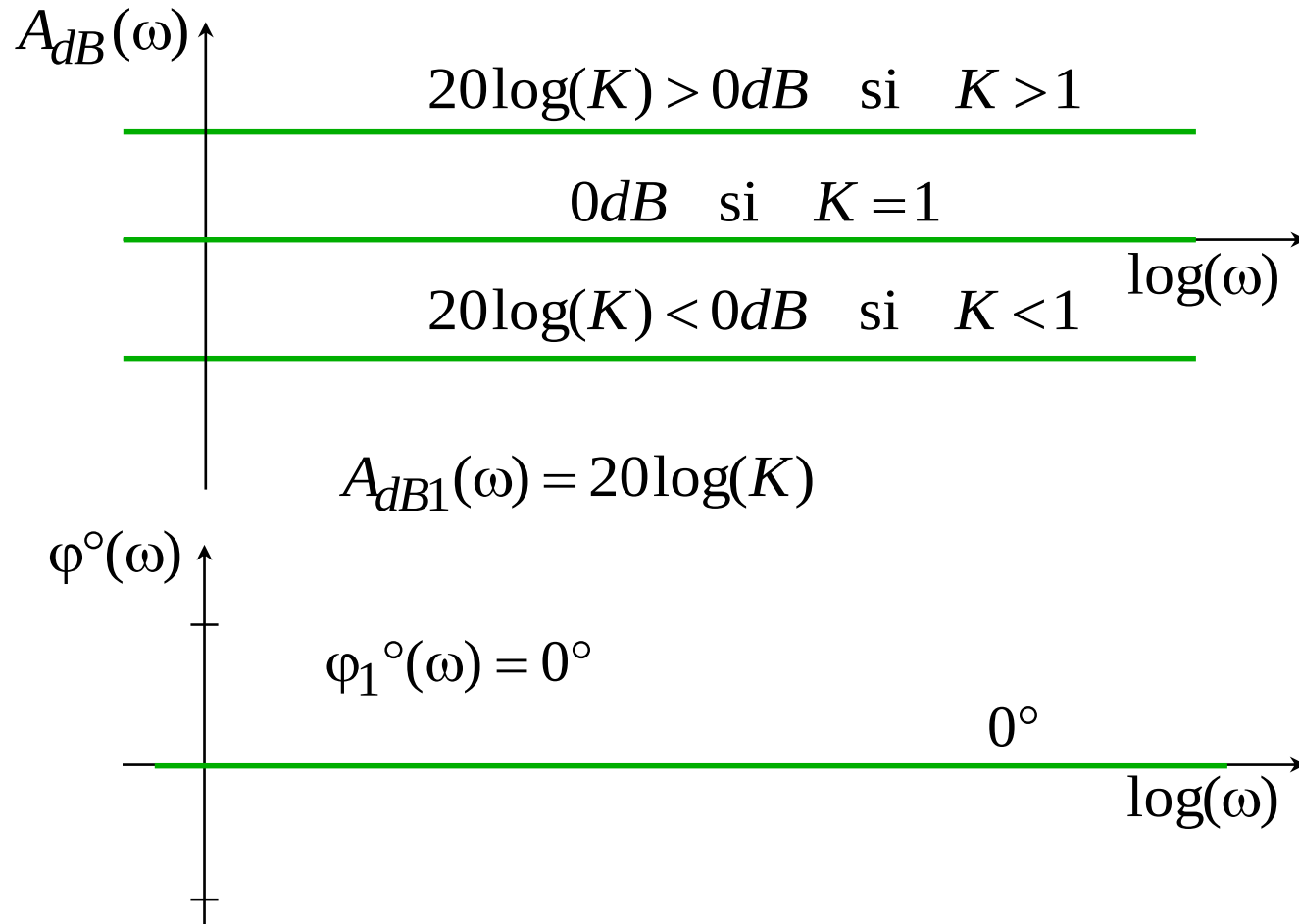
$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{2}}$$

Systeme du 2^{ème} ordre : Corrélation entre réponse indicielle et réponse fréquentielle



Gain pur

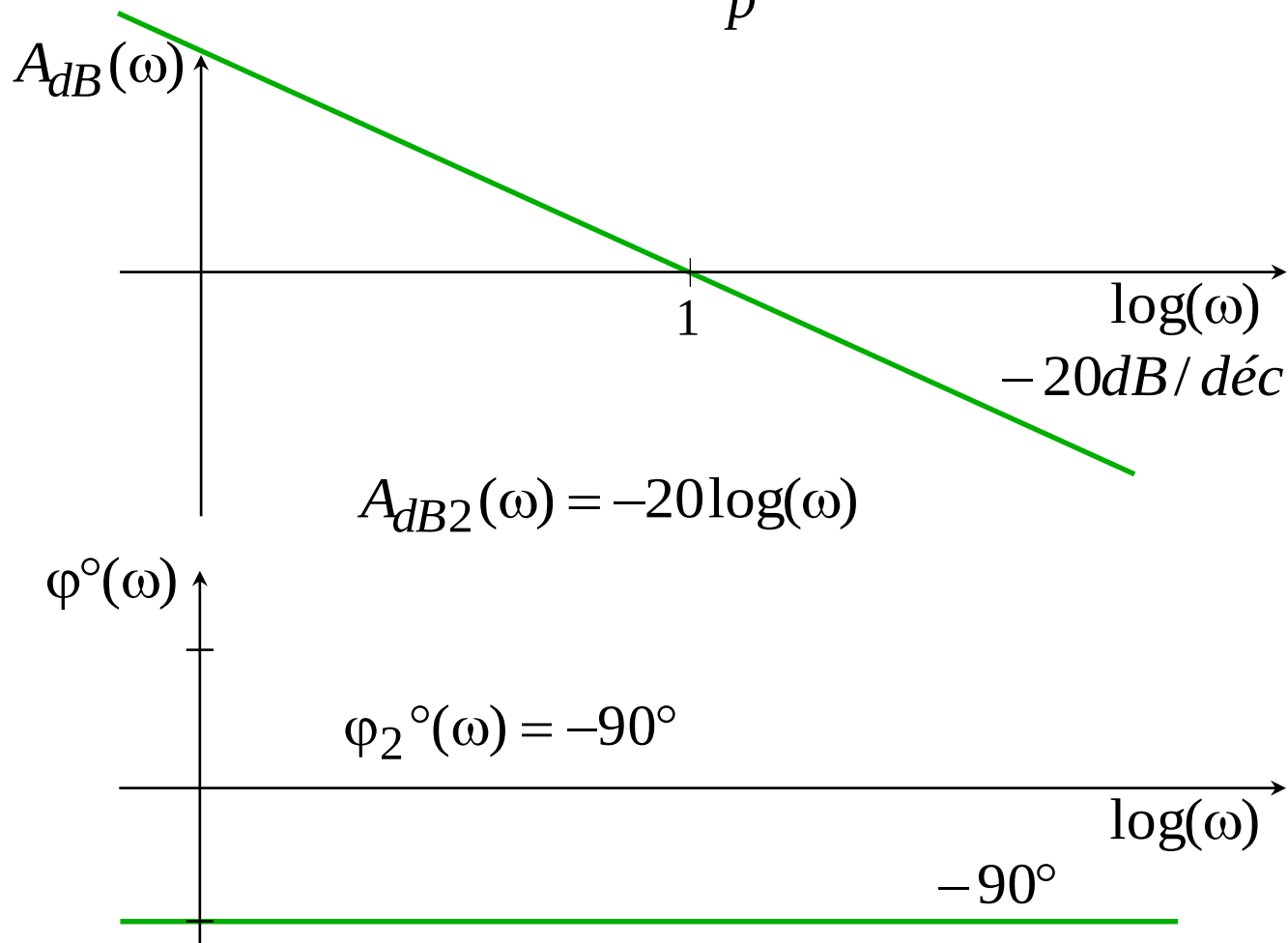
$$T_1(p) = K \quad (K > 0)$$



Remarque : si $K < 0$, $\varphi_1^{\circ}(\omega) = -180^{\circ}$

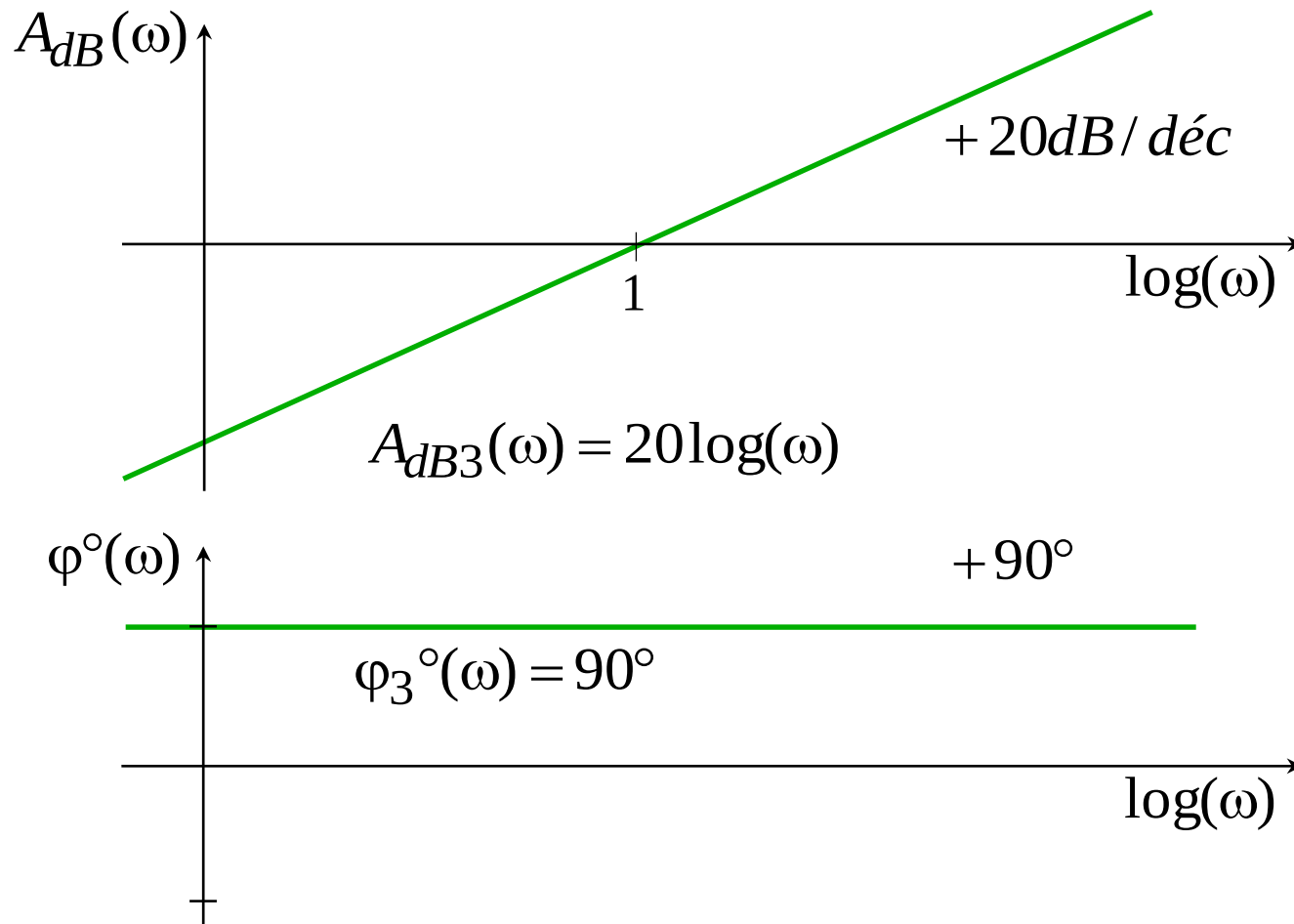
Intégrateur

$$T_2(p) = \frac{1}{p}$$



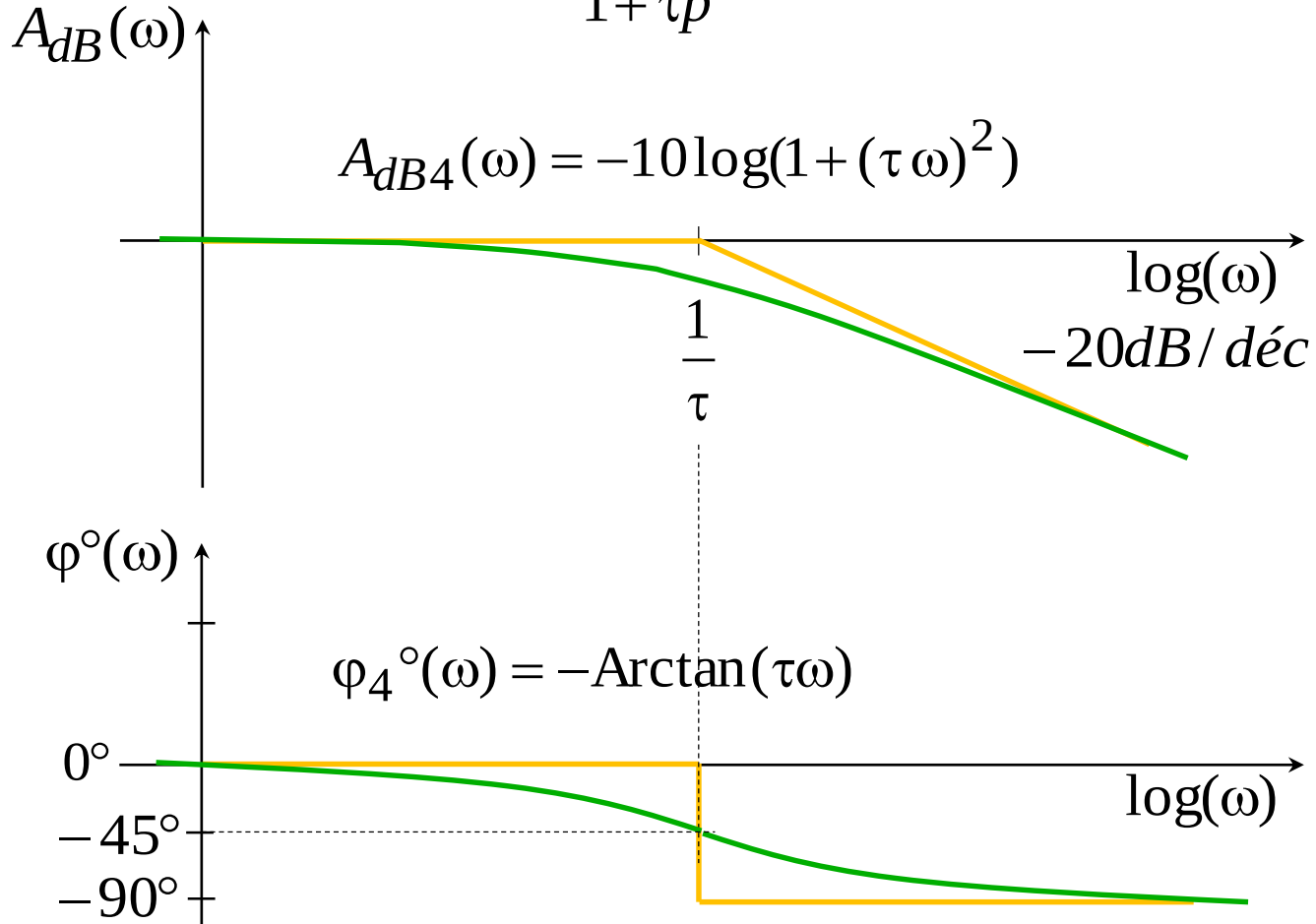
Dérivateur

$$T_3(p) = p$$



Filtre passe-bas du 1^{er} ordre

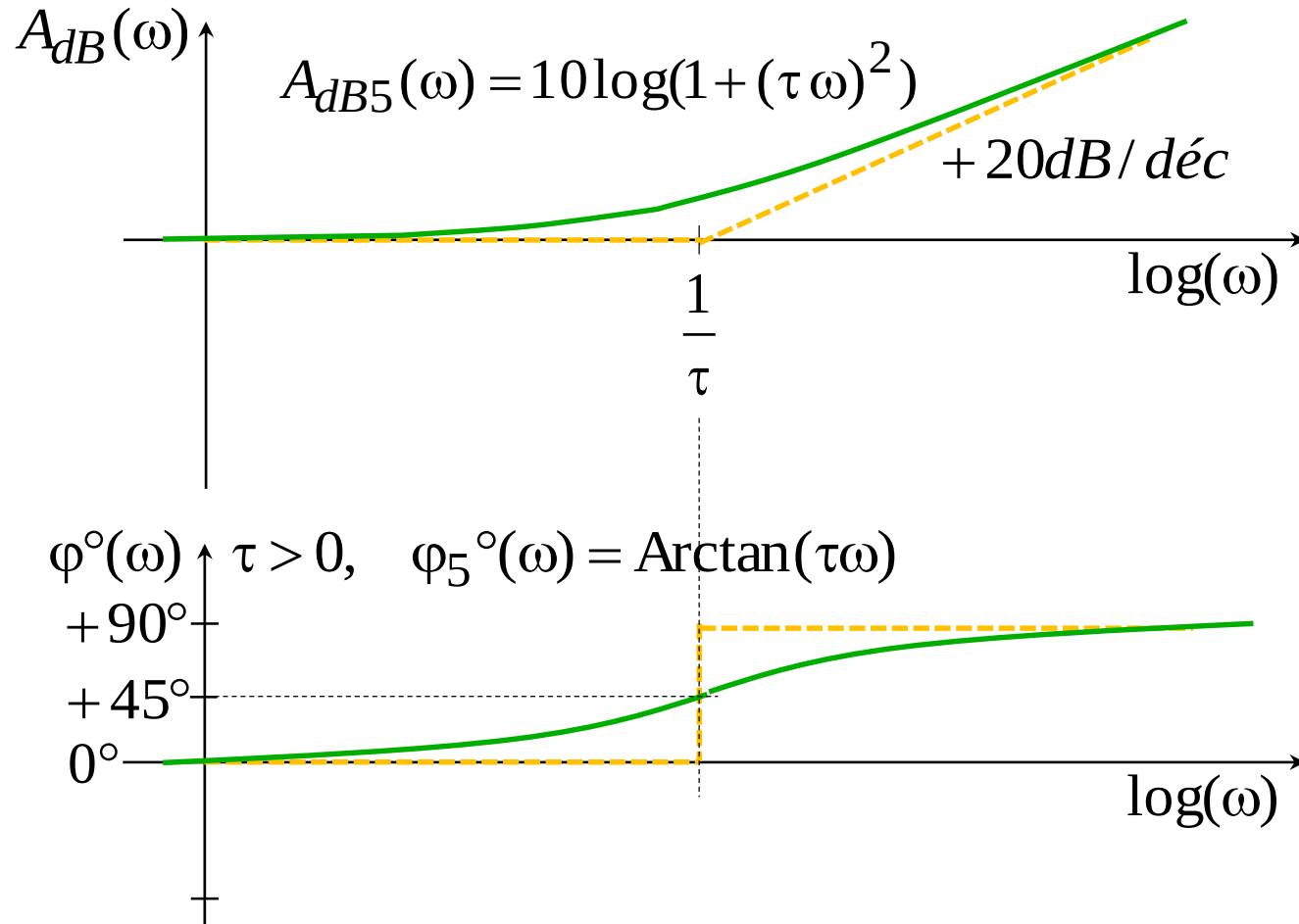
$$T_4(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad (\tau > 0)$$



Remarque : si $\tau < 0$, $\varphi_4^\circ(\omega)$ change de signe

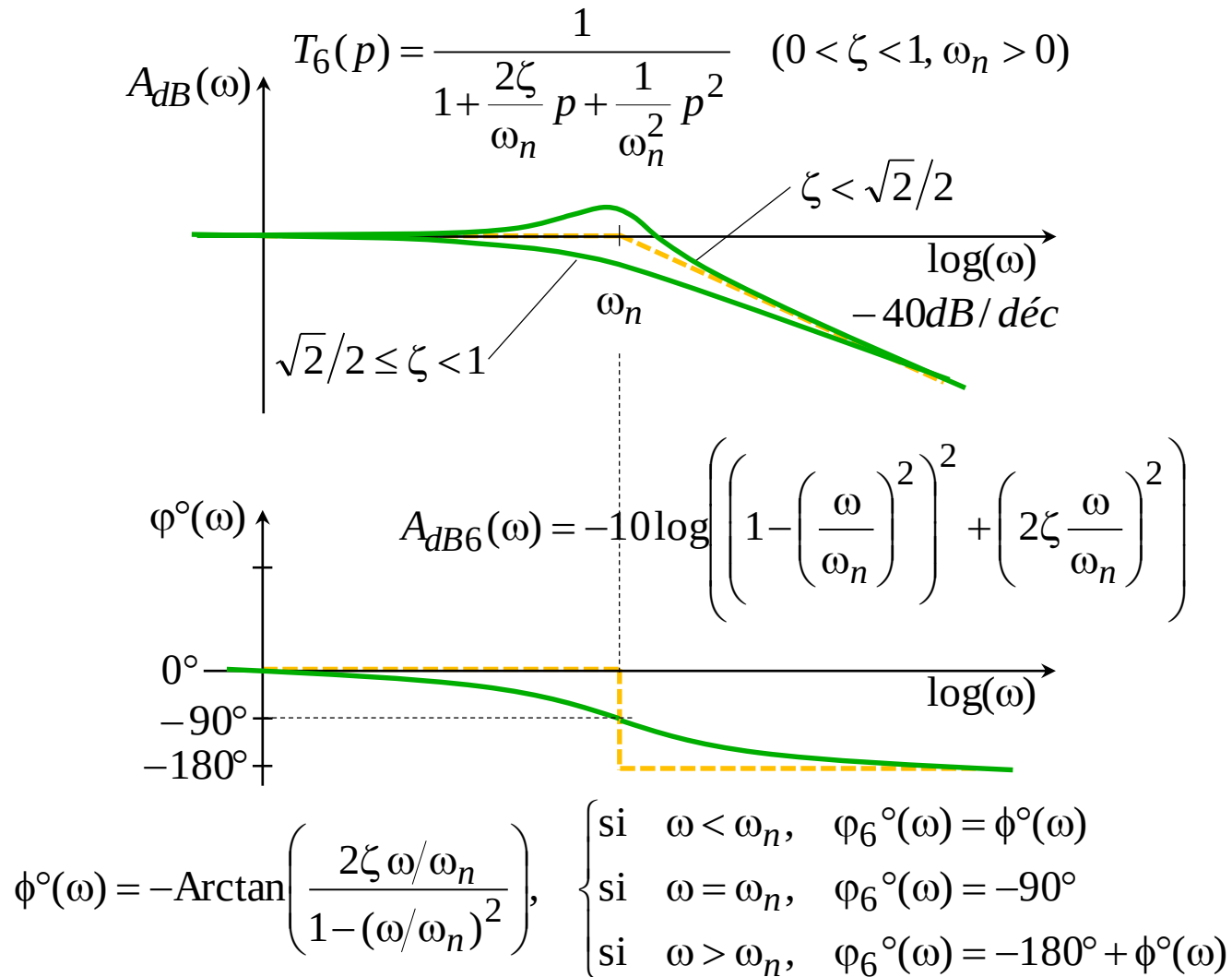
Correcteur proportionnel et dérivé

$$T_5(p) = (1 + \tau p) \quad (\forall \tau)$$



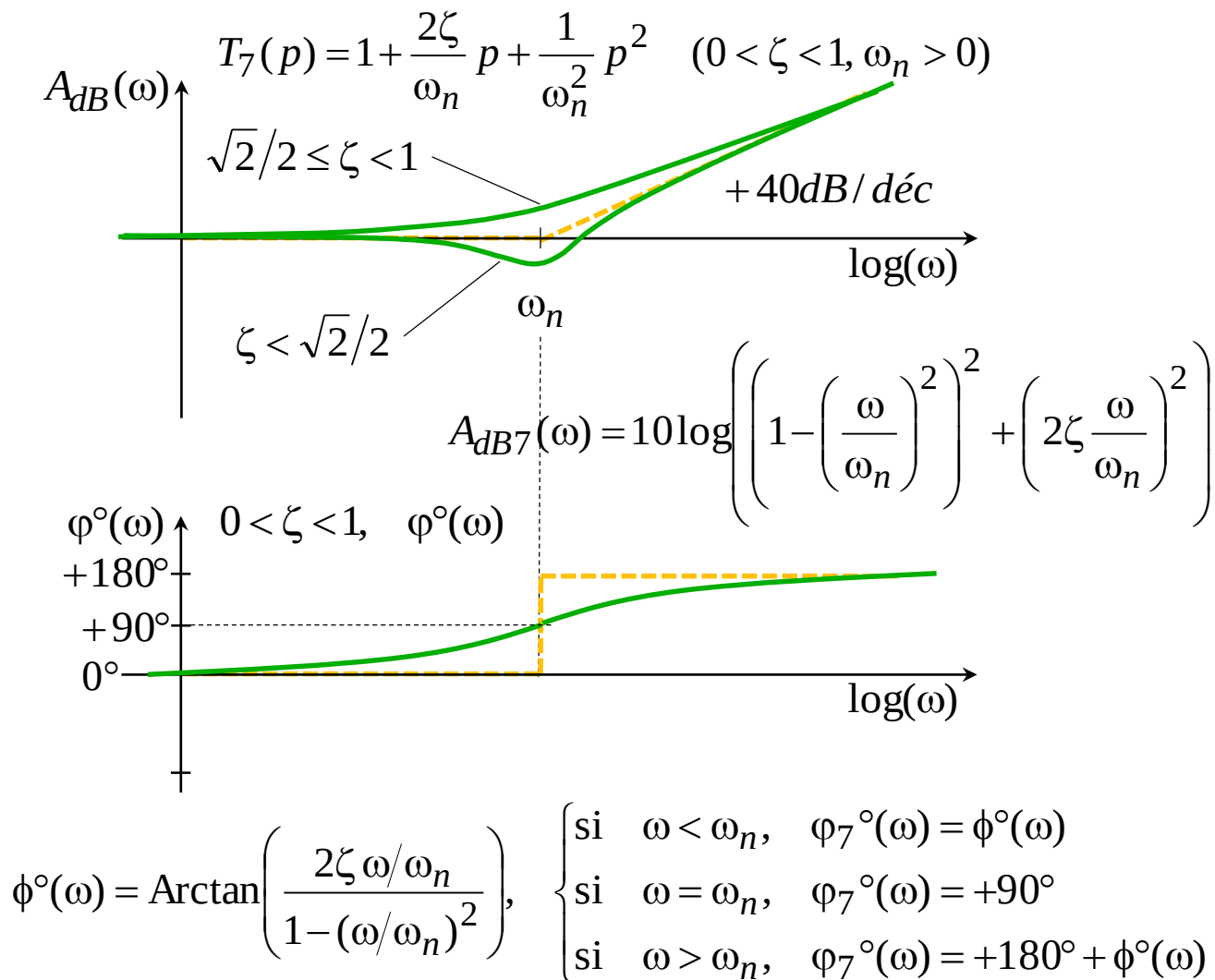
Remarque : si $\tau < 0$, $\varphi_5^o(\omega)$ change de signe

Filtre passe-bas du 2^{ème} ordre



Remarque : si $\zeta < 0$, $\phi_6^\circ(\omega)$ change de signe

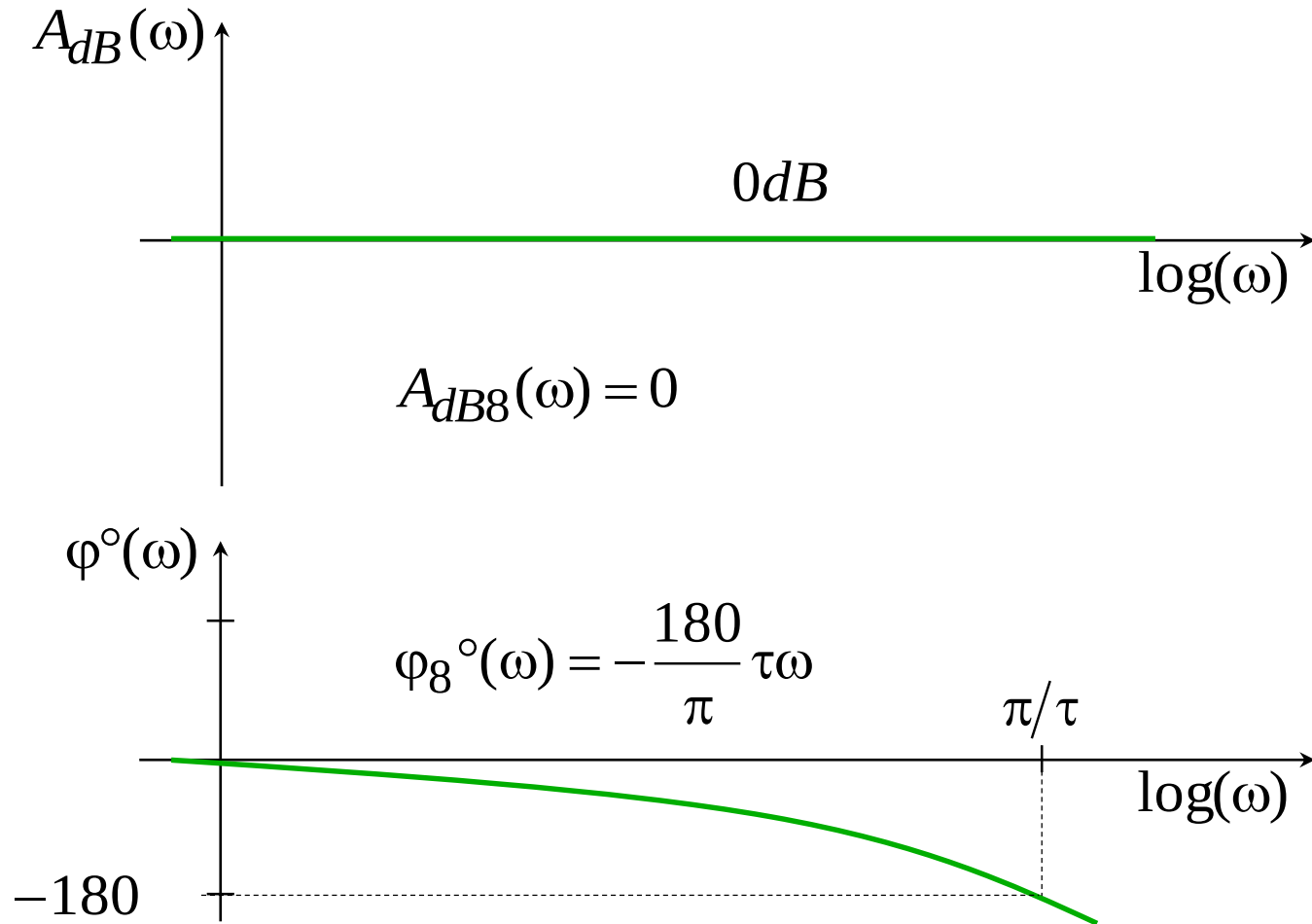
Correcteur proportionnel et dérivé deux fois



Remarque : si $\zeta < 0$, $\phi_7^o(\omega)$ change de signe

Retard pur

$$T_g(p) = \exp(-\tau p) \quad (\tau > 0)$$



Fonction de transfert composé

Remarque : Il sera toujours possible de tracer dans le plan de Bode un lieu compliqué mais jamais son tracé ne nécessitera de construire des lieux élémentaires autres que ce correspondant au tracé de **ces 8 fonctions élémentaires**.

$$T(p) = K \cdot e^{-\tau \cdot p} \cdot p^{n_1} \frac{\prod_{i=1}^{n_2} (1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod_{k=1}^{n_4} \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{nk}^2} \cdot p^2 \right)}{\prod_{j=1}^{n_3} (1 + \tau_j \cdot p) \cdot \prod_{l=1}^{n_5} \left(1 + \frac{2\zeta_l}{\omega_{nl}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{nl}^2} \cdot p^2 \right)}$$

avec $n_1 > 0$ ou $n_1 < 0$
et $n_2, n_3, n_4, n_5 > 0$

$A_{dB} = \sum$ du gain logarithmique de chaque fonction de transfert

$\varphi^\circ = \sum$ du déphasage de chaque fonction de transfert

Exemple

$$T(p) = \frac{K \cdot p \cdot e^{-\tau_2 \cdot p}}{1 + \tau_1 \cdot p}$$

$$T(p) = K \cdot p \cdot \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p} \cdot e^{-\tau_2 \cdot p}$$

$$T_1(p) = K$$

$$T_3(p) = p$$

$$T_4(p) = \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p}$$

$$T_8(p) = e^{-\tau_2 \cdot p}$$

$$T(p) = T_1(p) \cdot T_3(p) \cdot T_4(p) \cdot T_8(p)$$

$$T(j \cdot \omega) = T_1(j \cdot \omega) \cdot T_3(j \cdot \omega) \cdot T_4(j \cdot \omega) \cdot T_8(j \cdot \omega)$$

$$A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_3(\omega) \cdot A_4(\omega) \cdot A_8(\omega)$$

Exemple

$$A_{dB}(\omega) = A_{dB1}(\omega) + A_{dB3}(\omega) + A_{dB4}(\omega) + A_{dB8}(\omega)$$

$$A_{dB1}(\omega) = 20 \cdot \log(K)$$

$$A_{dB3}(\omega) = 20 \cdot \log(\omega)$$

$$A_{dB4}(\omega) = -10 \cdot \log(1 + (\tau_1 \cdot \omega)^2)$$

$$A_{dB8}(\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(K) + 20 \cdot \log(\omega) - 10 \cdot \log(1 + (\tau_1 \cdot \omega)^2) + 0$$

$$\varphi^\circ(\omega) = \varphi_1^\circ(\omega) + \varphi_3^\circ(\omega) + \varphi_4^\circ(\omega) + \varphi_8^\circ(\omega)$$

$$\varphi_1^\circ(\omega) = 0^\circ$$

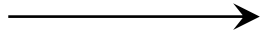
$$\varphi_3^\circ(\omega) = 90^\circ$$

$$\varphi_4^\circ(\omega) = -\text{Arctan}(\tau_1 \cdot \omega)$$

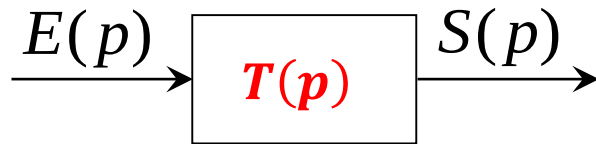
$$\varphi_8^\circ(\omega) = -\frac{180}{\pi} \cdot \tau_2 \cdot \omega$$

$$\varphi^\circ(\omega) = 0 + 90 - \text{Arctan}(\tau_1 \cdot \omega) - \frac{180}{\pi} \cdot \tau_2 \cdot \omega$$

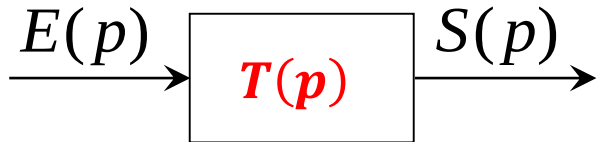
Simplification de schéma-bloc : constituants



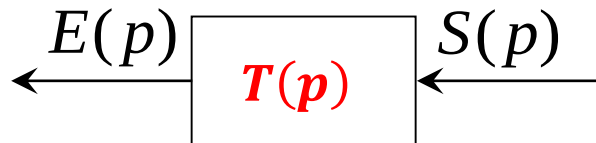
- « **arc orienté** », il représente le flux de signaux de données.
- « **bloc fonctionnel** », c'est le symbole représentant l'opération mathématiques appliqué à l'entrée du bloc et produisant sa sortie. En Automatique, cette opération sera très souvent représentée par une **fonction de transfert**.



Remarque :

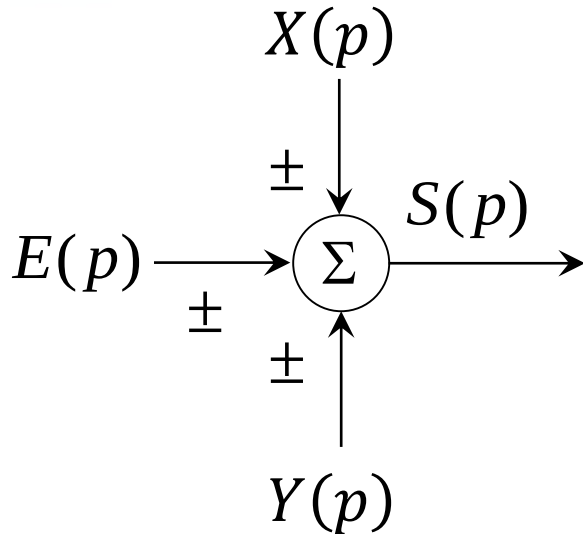


$$S(p) = T(p) \cdot E(p)$$



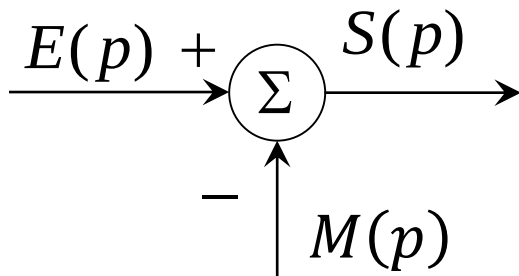
$$E(p) = T(p) \cdot S(p)$$

Simplification de schéma-bloc : constituants



- « **sommateur** », élément qui permet de faire la somme de tous les signaux d'entrées.

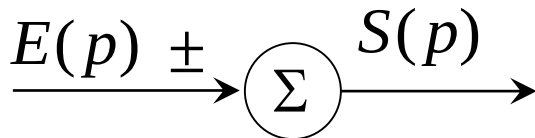
$$S(p) = \pm X(p) \pm E(p) \pm Y(p)$$



- « **détecteur d'écart** », élément qui élabore l'écart entre deux signaux.

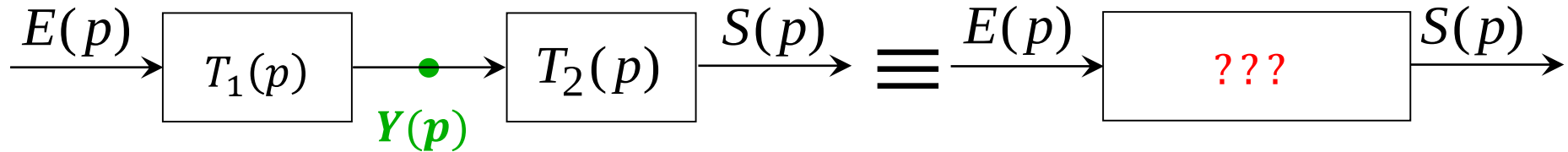
$$S(p) = E(p) - M(p)$$

Remarque :



$$S(p) = \pm E(p)$$

Propriété 1 : Mise en série

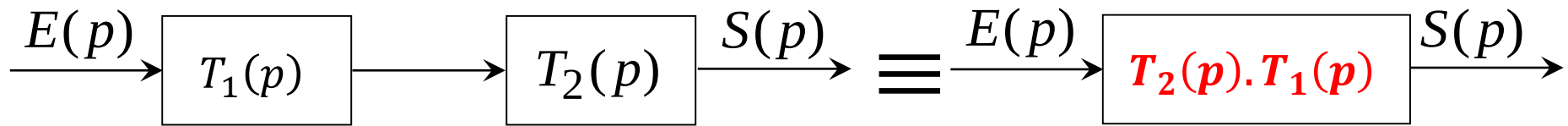


$$Y(p) = T_1(p) \cdot E(p)$$

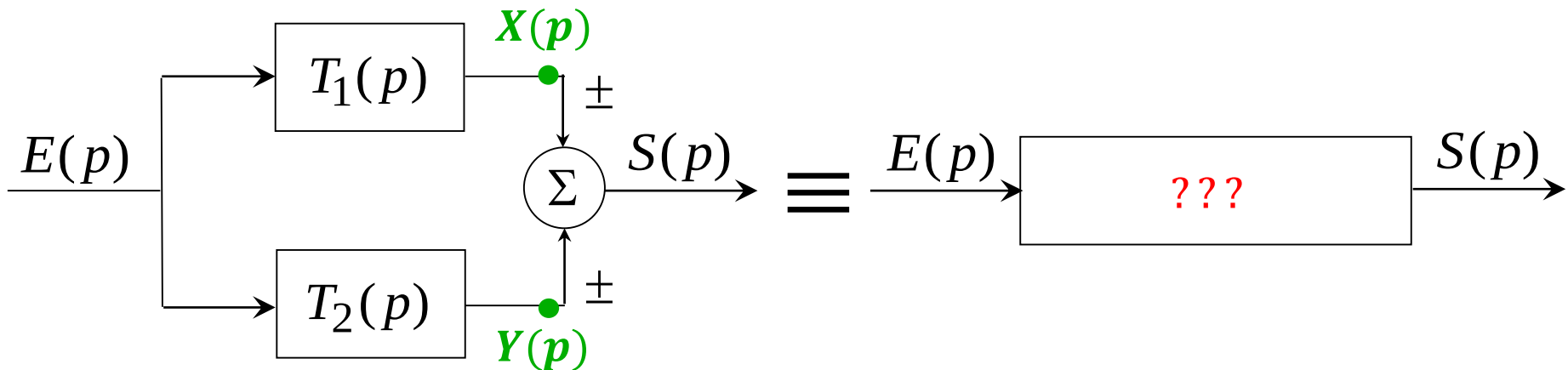
$$S(p) = T_2(p) \cdot Y(p)$$

$$S(p) = T_2(p) \cdot T_1(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = ??? \cdot E(p)$$



Propriété 2 : Mise en parallèle



$$X(p) = T_1(p) \cdot E(p)$$

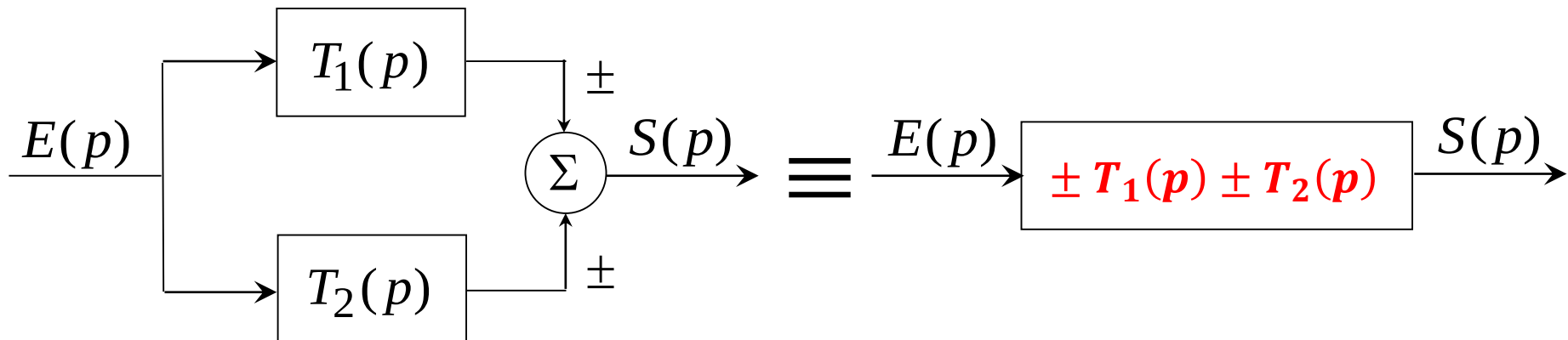
$$Y(p) = T_2(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = \pm X(p) \pm Y(p)$$

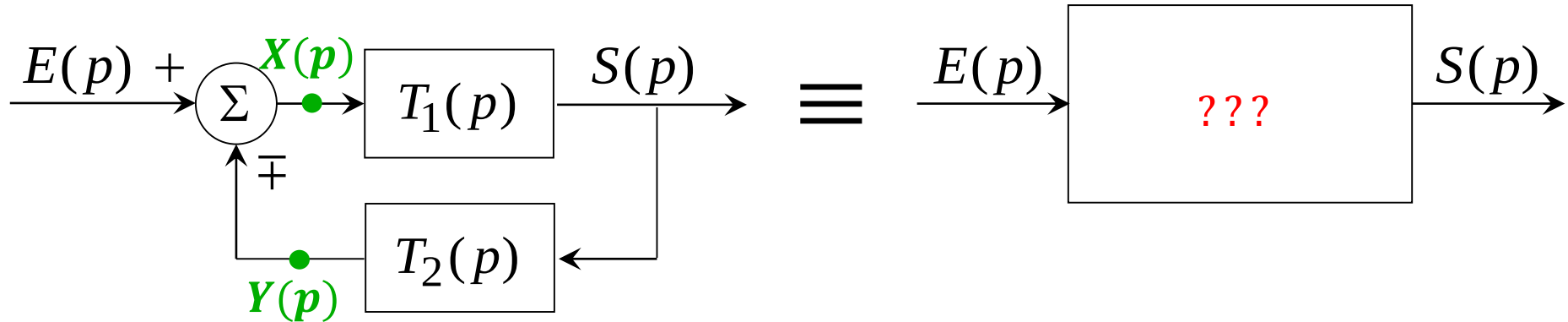
$$S(p) = \pm T_1(p) \cdot E(p) \pm T_2(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = ??? \cdot E(p)$$

$$S(p) = (\pm T_1(p) \pm T_2(p)) \cdot E(p)$$



Propriété 3 : Mise en contre réaction



$$X(p) = E(p) \mp Y(p)$$

$$S(p) = T_1(p) \cdot X(p)$$

$$Y(p) = T_2(p) \cdot S(p)$$

$$S(p) = T_1(p) \cdot [E(p) \mp Y(p)]$$

$$S(p) = T_1(p) \cdot [E(p) \mp T_2(p) \cdot S(p)]$$

Propriété 3 : Mise en contre réaction

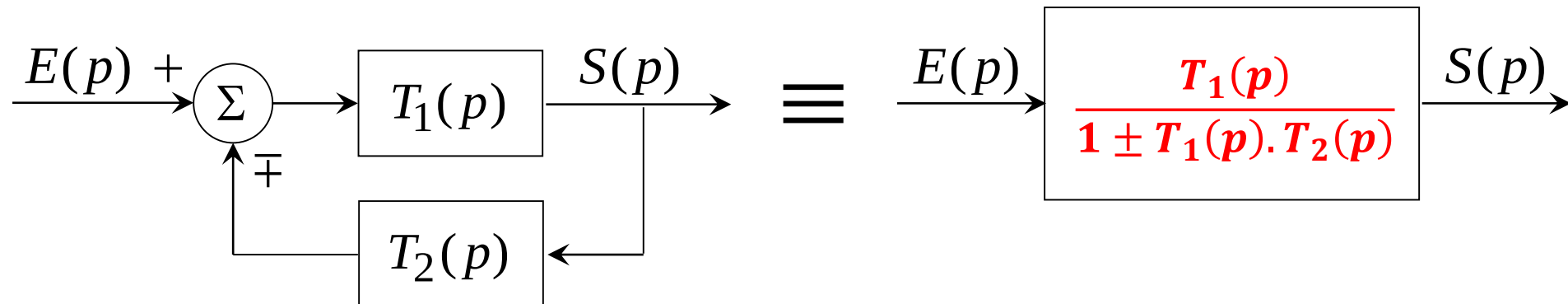
$$S(p) = T_1(p) \cdot E(p) \mp T_1(p) \cdot T_2(p) \cdot S(p)$$

$$S(p) \pm T_1(p) \cdot T_2(p) \cdot S(p) = T_1(p) \cdot E(p)$$

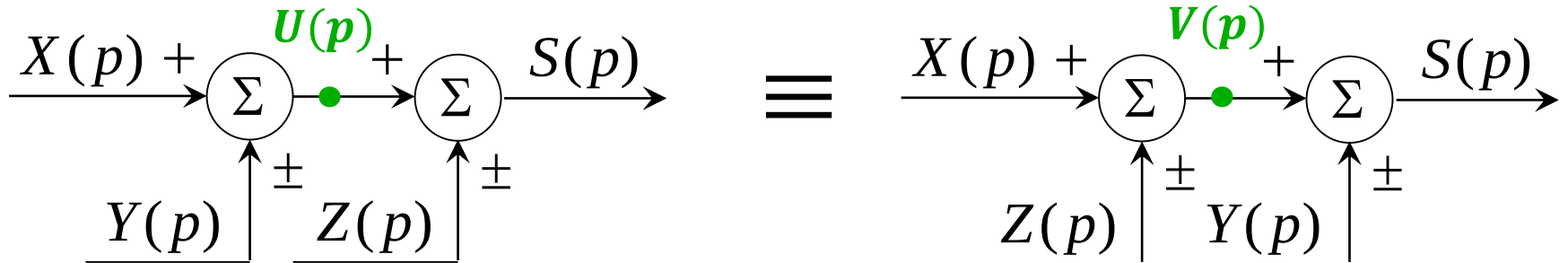
$$S(p) \cdot [1 \pm T_1(p) \cdot T_2(p)] = T_1(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = \frac{T_1(p)}{1 \pm T_1(p) \cdot T_2(p)} \cdot E(p)$$

$$S(p) = ??? \cdot E(p)$$



Propriété 4 : Permutation de sommateur



$$U(p) = X(p) \pm Y(p)$$

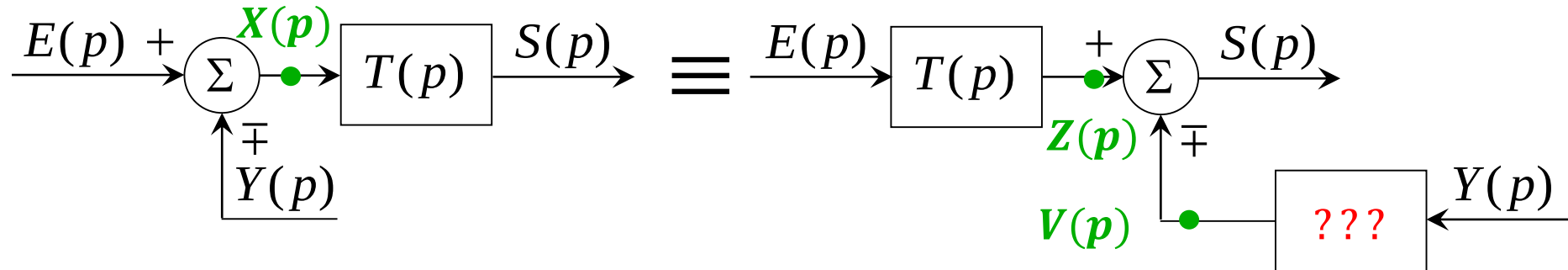
$$V(p) = X(p) \pm Z(p)$$

$$S(p) = U(p) \pm Z(p)$$

$$S(p) = V(p) \pm Y(p)$$

$$S(p) = X(p) \pm Y(p) \pm Z(p) \quad \longleftrightarrow \quad S(p) = X(p) \pm Z(p) \pm Y(p)$$

Propriété 5 : Déplacement d'un sommateur en amont



$$X(p) = E(p) \mp Y(p)$$

$$Z(p) = T(p) \cdot E(p)$$

$$V(p) = ??? \cdot Y(p)$$

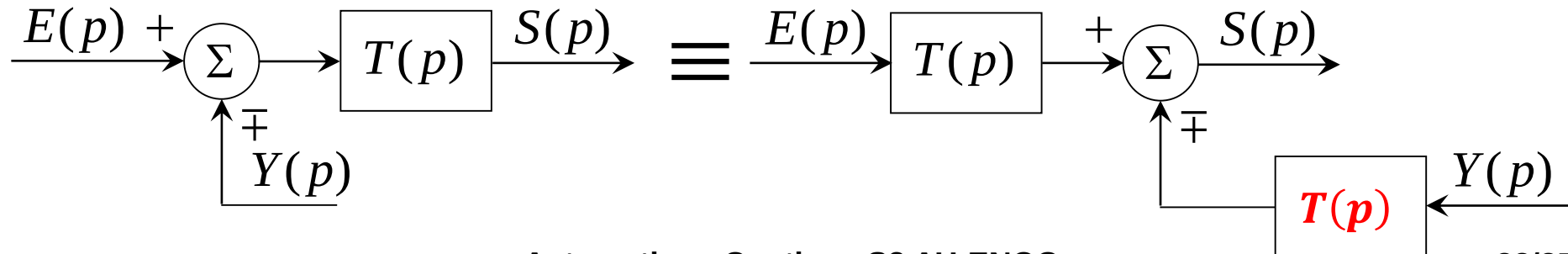
$$S(p) = T(p) \cdot X(p)$$

$$S(p) = Z(p) \mp V(p)$$

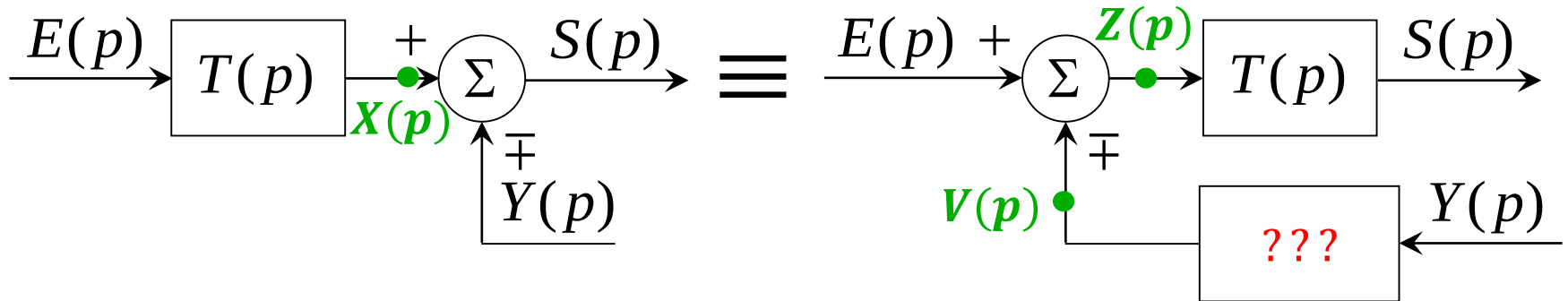
$$S(p) = T(p) \cdot (E(p) \mp Y(p))$$

$$S(p) = T(p) \cdot E(p) \mp ??? \cdot Y(p)$$

$$\xrightarrow{\text{blue arrow}} S(p) = T(p) \cdot \left(E(p) \mp \frac{1}{T(p)} ??? \cdot Y(p) \right)$$



Propriété 6 : Déplacement d'un sommateur en aval



$$X(p) = T(p) \cdot E(p)$$

$$Z(p) = E(p) \mp V(p) \quad V(p) = ??? \cdot Y(p)$$

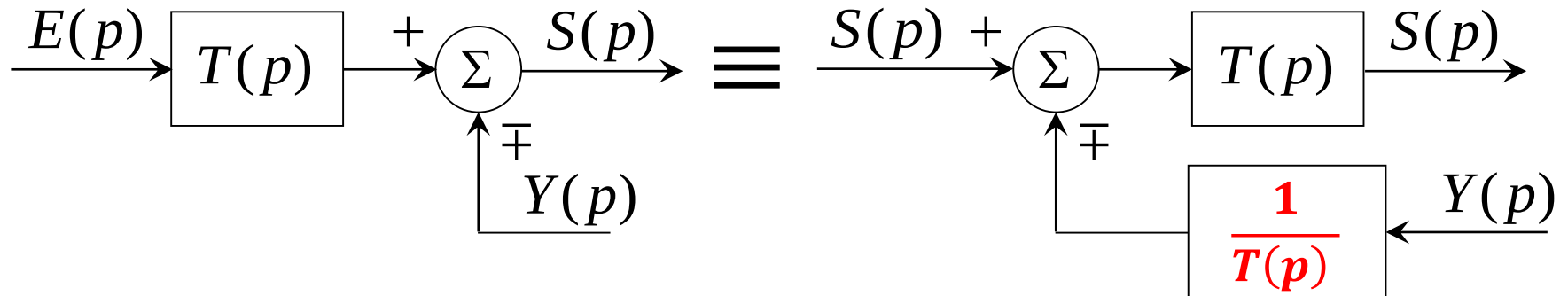
$$S(p) = X(p) \mp Y(p)$$

$$S(p) = T(p) \cdot Z(p)$$

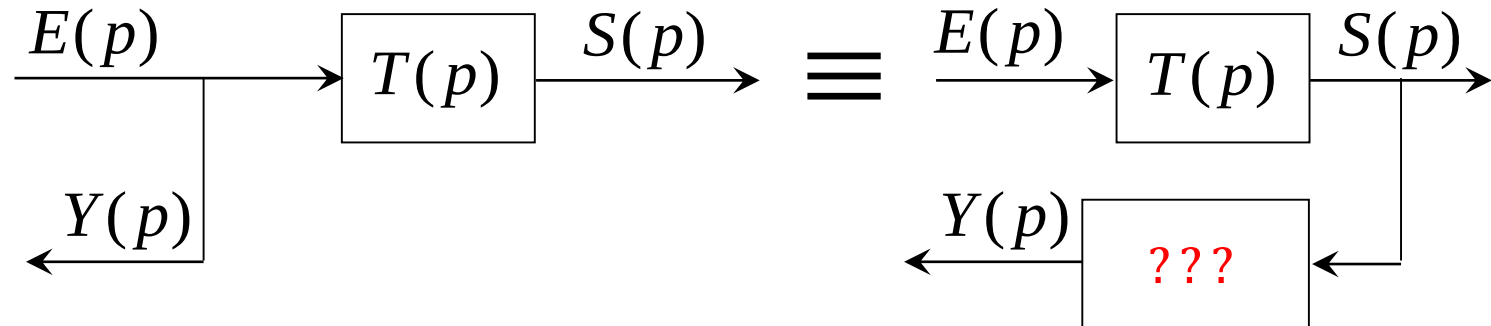
$$S(p) = T(p) \cdot E(p) \mp Y(p)$$

$$S(p) = T(p) \cdot (E(p) \mp ??? \cdot Y(p))$$

$$\xrightarrow{\text{blue arrow}} S(p) = T(p) \cdot E(p) \mp T(p) \cdot ??? \cdot Y(p)$$



Propriété 7 : Déplacement d'un point de mesure en aval



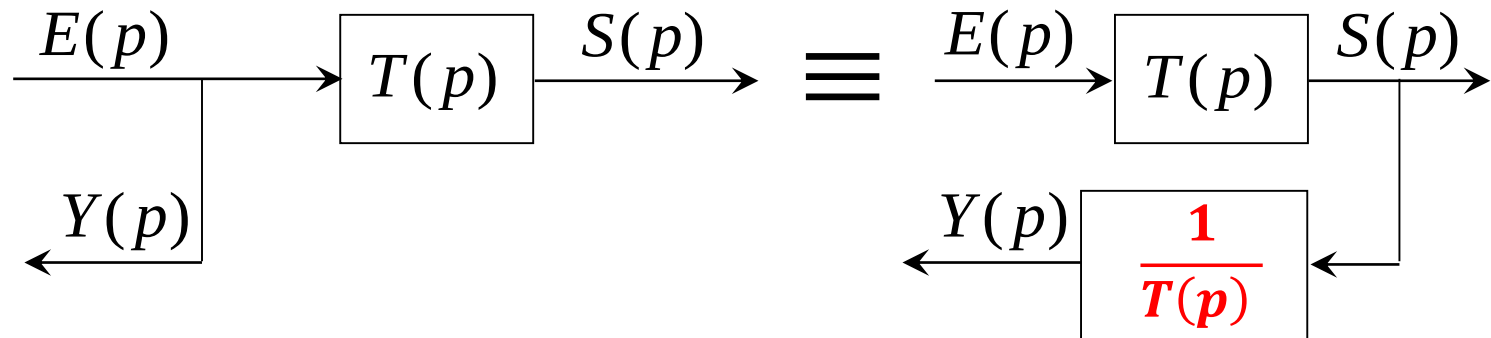
$$S(p) = T(p) \cdot E(p)$$

$$Y(p) = ??? \cdot S(p)$$

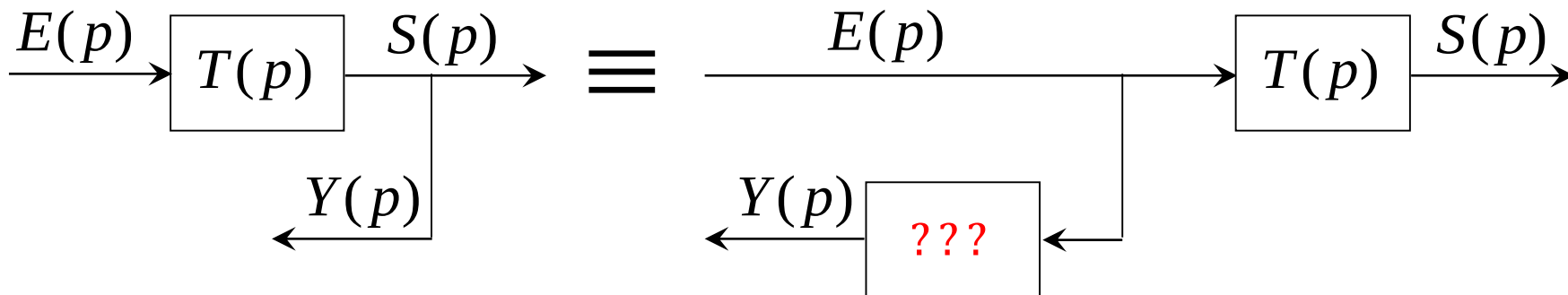
$$Y(p) = E(p)$$

$$S(p) = T(p) \cdot E(p)$$

$$Y(p) = ??? \cdot T(p) \cdot E(p)$$



Propriété 8 : Déplacement d'un point de mesure en amont



$$S(p) = T(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = T(p) \cdot E(p)$$

$$Y(p) = S(p)$$

$$Y(p) = T(p) \cdot E(p) \quad \longleftrightarrow \quad Y(p) = ??? \cdot E(p)$$

