Chapitre 2, Partie 2 : Formes canoniques et Système asservi

Classe α d'un système

- La classe « $\boldsymbol{\alpha}$ » d'un système est égal au nombre de pôle en 0 que possède ce système c'est-à-dire le **nombre d'intégrateur pur** entre son entrée et sa sortie.

$$T(p) = \frac{1}{1+\tau.p} \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{classe\ \alpha = 0})$$

$$T(p) = \frac{1}{p(1+\tau.p)} \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{classe\ \alpha = 1})$$

$$T(p) = \frac{1}{p^2(1+\tau.p)} \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{classe\ \alpha = 2})$$

Forme canonique de Bode

- Cette forme canonique permet de mettre en évidence le gain et les constantes de temps d'une fonction de transfert. Pour cela il est nécessaire que les **coefficients des plus basses puissances** en « p » des numérateur et dénominateur de la fonction de transfert soient **unitaires**.

$$T(p) = \frac{3+2p}{2p(5+4p)} \quad \Longrightarrow \quad T_B(p) = \frac{3}{2*5} \cdot \frac{1+\frac{2}{3}p}{p(1+\frac{4}{5}p)}$$

- Gain statique : $K = \dfrac{3}{10}$

- Constantes de temps : $\tau_1 = \dfrac{2}{3}$ et $\tau_2 = \dfrac{4}{5}$

Forme canonique de Laplace

- Cette forme canonique permet de mettre en évidence les pôles et les zéros d'une fonction de transfert. Pour cela il est nécessaire que les **coefficients des plus hautes puissances** en « p » des numérateur et dénominateur de la fonction de transfert soient **unitaires**.

$$T(p) = \frac{3+2p}{2p(5+4p)} \quad \Longrightarrow \quad T_L(p) = \frac{2}{2*4} \cdot \frac{p+\frac{3}{2}}{p(p+\frac{5}{4})}$$

- zéros : $z_1 = -\frac{3}{2}$
- pôles : $p_1 = 0$ et $p_2 = -\frac{5}{4}$

Remarque : Il est absolument nécessaire d'utiliser l'une de ces 2 formes canoniques afin de déterminer correctement les paramètres ($\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{\tau}$) ou ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{\zeta}$ et $\boldsymbol{\omega_n}$).

Détermination des paramètres (K et τ)

$$T(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1.p}$$

$$T_B(p) = \frac{b_0}{a_0}.\frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}.p}$$

$$T_B(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

$$\mathbf{1})\ \boldsymbol{\tau} = \frac{a_1}{a_0}$$

$$\mathbf{2})\ \boldsymbol{K} = \frac{b_0}{a_0}$$

Détermination des paramètres (K et τ)

$$T(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 . p}$$

$$T_L(p) = \frac{b_0}{a_1} . \frac{1}{\frac{a_0}{a_1} + p}$$

$$T_L(p) = \frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + p}$$

1) $\frac{1}{\tau} = \frac{a_0}{a_1}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{a_1}{a_0}$

2) $\frac{K}{\tau} = \frac{b_0}{a_1}$ $\Rightarrow K = \tau . \frac{b_0}{a_1}$ $\Rightarrow \boldsymbol{K} = \frac{b_0}{a_0}$

Détermination des paramètres (K, ζ et ω_n)

$$T(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1.p + a_2.p^2}$$

$$T_B(p) = \frac{b_0}{a_0}.\frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}.p + \frac{a_2}{a_0}.p^2}$$

$$T_B(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}.p + \frac{1}{\omega_n^2}.p^2}$$

1) $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{a_2}{a_0}$ $\quad \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2}$ $\quad \Rightarrow \boldsymbol{\omega_n} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$

2) $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{a_1}{a_0}$ $\quad \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{2}.\frac{a_1}{a_0}$ $\quad \Rightarrow \boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}.\frac{a_1}{\sqrt{a_0.a_2}}$

3) $\boldsymbol{K} = \frac{b_0}{a_0}$

Détermination des paramètres (K, ζ et ω_n)

$$T(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1.p + a_2.p^2}$$

$$T_L(p) = \frac{b_0}{a_2}.\frac{1}{\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2}.p + p^2}$$

$$T_L(p) = \frac{K.\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2.\zeta.\omega_n.p + p^2}$$

1) $\omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\omega_n} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$

2) $2.\zeta.\omega_n = \frac{a_1}{a_2}$ $\Rightarrow \zeta = \frac{1}{2.\omega_n}.\frac{a_1}{a_0}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}.\frac{a_1}{\sqrt{a_0.a_2}}$

3) $K.\omega_n^2 = \frac{b_0}{a_2}$ $\Rightarrow K = \frac{1}{\omega_n^2}.\frac{b_0}{a_2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{K} = \frac{b_0}{a_0}$

Fonction de transfert équivalente en haute et basse fréquence

$$T(p) = \frac{b_0 + b_1.p + b_2.p^2}{a_0 + a_1.p + a_2.p^2 + a_3.p^3 + a_4.p^4}$$

- **Fonction de transfert équivalente en basse fréquence :**

$$T_{BF}(p) \approx \frac{b_0}{a_0} \qquad T_{BF}(j\omega) \approx \frac{b_0}{a_0}$$

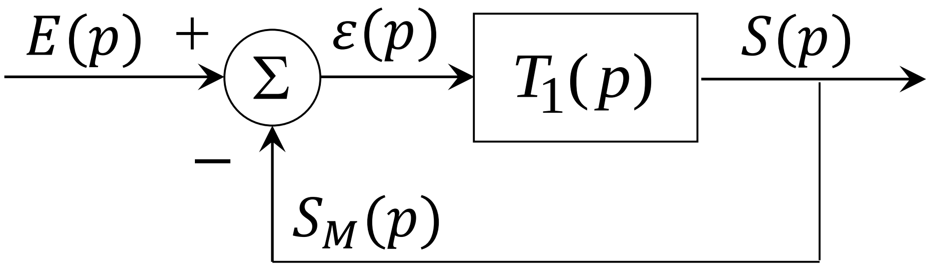
$$A(\omega) = \frac{b_0}{a_0} \qquad \varphi(\omega) = 0°$$

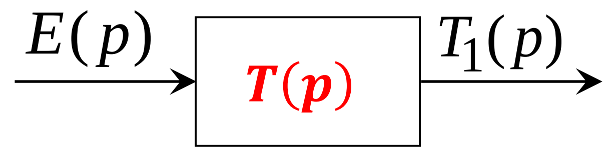
- **Fonction de transfert équivalente en haute fréquence :**

$$T_{HF}(p) \approx \frac{b_2.p^2}{a_4.p^4} \approx \frac{b_2}{a_4.p^2} \qquad T_{HF}(j\omega) \approx \frac{b_2}{a_4.(j\omega)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{b_2}{a_4.\omega^2} \qquad \varphi(\omega) = -180°$$

Effet du bouclage sur un système du 1er ordre





$$\boldsymbol{T(p) = \frac{T_1(p)}{1 + T_1(p)}}$$

$$T_1(p) = \frac{K_1}{1 + \tau_1 . p}$$

$$T(p) = \frac{\frac{K_1}{1 + \tau_1 . p}}{1 + \frac{K_1}{1 + \tau_1 . p}} = \frac{\frac{K_1}{1 + \tau_1 . p}}{\frac{1 + \tau_1 . p + K_1}{1 + \tau_1 . p}} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 . p + K_1}$$

$$T(p) = \frac{K_1}{(1 + K_1) + \tau_1 . p} = \frac{\frac{K_1}{(1 + K_1)}}{\frac{(1 + K_1)}{(1 + K_1)} + \frac{\tau_1}{(1 + K_1)} . p} = \frac{\frac{K_1}{(1 + K_1)}}{1 + \frac{\tau_1}{(1 + K_1)} . p}$$

Effet du bouclage sur un système du 1er ordre

$$T(p) = \frac{\frac{K_1}{(1+K_1)}}{1 + \frac{\tau_1}{(1+K_1)}.p}$$

$$T(p) = \frac{\boldsymbol{K}}{1 + \boldsymbol{\tau}.p}$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{K_1}{1+K_1}$$

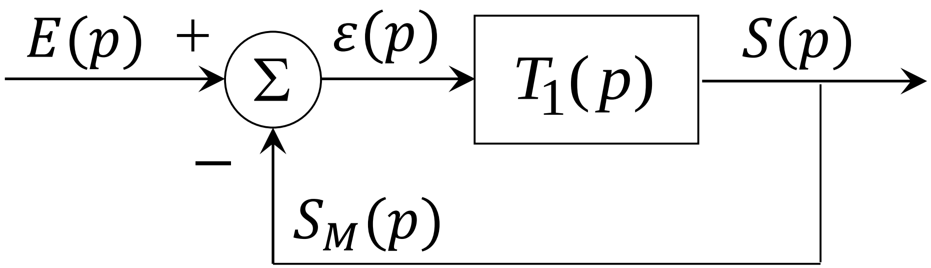
$$T_1(p) = \frac{K_1}{1 + \tau_1.p}$$

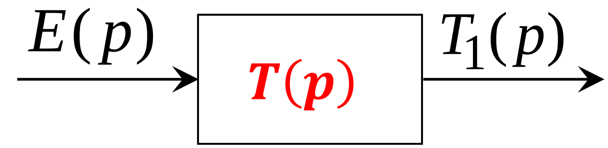
$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\tau_1}{1+K_1}$$

- ✓ $\boldsymbol{K < K_1}$ et $\boldsymbol{K < 1}$ $\Longrightarrow$ Le gain statique diminue avec le bouclage
- ✓ $\boldsymbol{\tau < \tau_1}$ $\Longrightarrow$ La constante de temps diminue avec le bouclage
- ✓ L'évolution s'effectue avec un rapport $(\boldsymbol{1 + K_1})$, appelé coefficient de rétro-action

Remarque : Le bouclage ne change pas l'ordre du système.

Effet du bouclage sur un système du 2ème ordre





$$\boldsymbol{T(p)=\frac{T_1(p)}{1+T_1(p)}}$$

$$T_1(p)=\frac{K_1}{1+\frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p+\frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2}$$

$$T(p)=\frac{\dfrac{K_1}{1+\frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p+\frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2}}{1+\dfrac{K_1}{1+\frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p+\frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2}}=\frac{\dfrac{K_1}{1+\frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p+\frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2}}{\dfrac{1+\frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p+\frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2+K_1}{1+\frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p+\frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2}}$$

Effet du bouclage sur un système du 2ème ordre

$$T(p) = \frac{K_1}{1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p + \frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2 + K_1} = \frac{K_1}{(1 + K_1) + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p + \frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2}$$

$$T(p) = \frac{\frac{K_1}{(1 + K_1)}}{\frac{(1 + K_1)}{(1 + K_1)} + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}(1 + K_1)}.p + \frac{1}{\omega_{n1}^2(1 + K_1)}.p^2}$$

$$T(p) = \frac{\frac{K_1}{(1 + K_1)}}{1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}(1 + K_1)}.p + \frac{1}{\omega_{n1}^2(1 + K_1)}.p^2}$$

Effet du bouclage sur un système du 2ème ordre

$$T(p) = \frac{\frac{K_1}{(1+K_1)}}{1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}(1+K_1)}.p + \frac{1}{\omega_{n1}^2(1+K_1)}.p^2}$$

$$T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}.p + \frac{1}{\omega_n^2}.p^2}$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{K_1}{1+K_1}$$

$$T_1(p) = \frac{K_1}{1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}.p + \frac{1}{\omega_{n1}^2}.p^2}$$

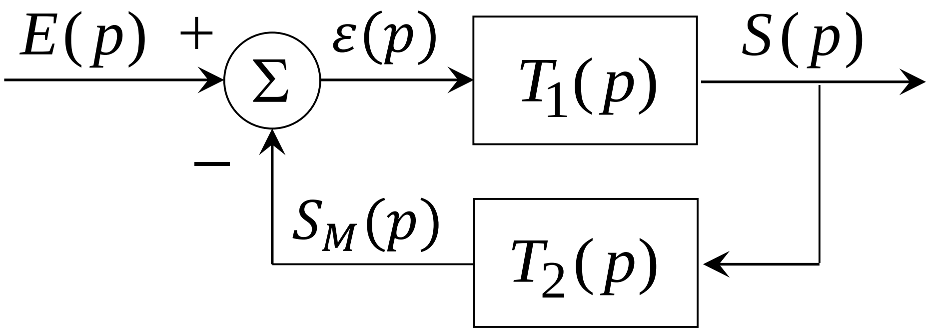
$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{\zeta_1}{\sqrt{(1+K_1)}}$$

$$\boldsymbol{\omega_n} = \omega_{n1}\sqrt{(1+K_1)}$$

- ✓ $\boldsymbol{K < K_1}$ et $\boldsymbol{K < 1}$ $\Longrightarrow$ Le gain statique diminue
- ✓ $\boldsymbol{\zeta < \zeta_1}$ $\Longrightarrow$ Le système est plus nerveux, mais il y a risque d'oscillations et de dépassement, le temps de réponse n'est pas forcément meilleur.
- ✓ $\boldsymbol{\omega_n < \omega_{n1}}$ $\Longrightarrow$ La rapidité augmente

Remarque : Le bouclage ne change pas l'ordre du système.

Le système asservi

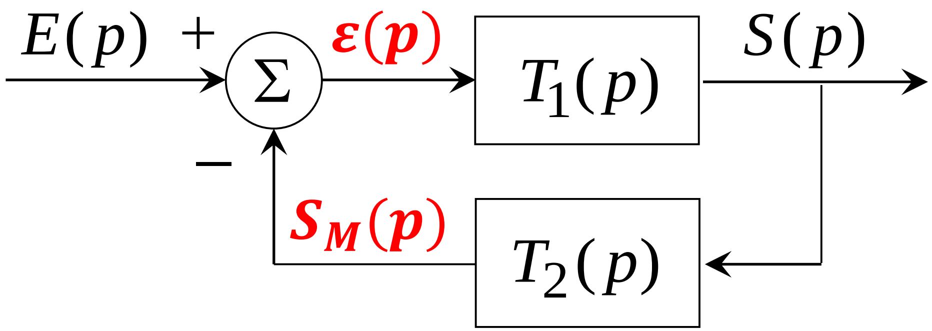


- ✓ $\boldsymbol{E(p)}$: Signal d'entrée ou de consigne
- ✓ $\boldsymbol{\varepsilon(p)}$: Signal d'erreur
- ✓ $\boldsymbol{S(p)}$: Signal de sortie
- ✓ $\boldsymbol{S_M(p)}$: Signal de sortie mesurée
- ✓ $\boldsymbol{T_1(p)}$: F.T. de la chaîne directe
- ✓ $\boldsymbol{T_2(p)}$: F.T. de la chaîne de retour

Les 3 fonctions de transfert associées à un système asservi :

- La fonction de **transfert de boucle** : $\boldsymbol{B(p) = \frac{S_M(p)}{\varepsilon(p)}}$.
- La fonction de **transfert du système asservi** : $\boldsymbol{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}}$.
- La fonction de **transfert d'erreur** : $\boldsymbol{T_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}}$

La fonction de transfert de boucle



- ✓ $\varepsilon(p)$: Signal d'erreur
- ✓ $S_M(p)$: Signal de sortie mesurée

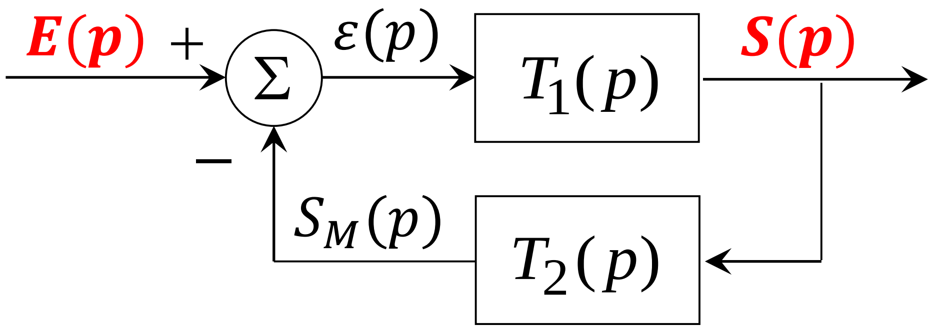
$$B(p) = \frac{S_M(p)}{\varepsilon(p)} = ???$$

$$S_M(p) = T_2(p).S(p) \qquad S(p) = T_1(p).\varepsilon(p)$$

$$S_M(p) = T_2(p).T_1(p).\varepsilon(p)$$

$$B(p) = \frac{S_M(p)}{\varepsilon(p)} = T_1(p).T_2(p)$$

La fonction de transfert du système asservi



- ✓ $\boldsymbol{E(p)}$: Signal d'entrée ou de consigne
- ✓ $\boldsymbol{S(p)}$: Signal de sortie

$$\boldsymbol{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = ???}$$

$$S(p) = T_1(p).\varepsilon(p) \qquad \varepsilon(p) = E(p) - S_M(p) \qquad S_M(p) = T_2(p).S(p)$$

$$S(p) = T_1(p).[E(p) - S_M(p)]$$

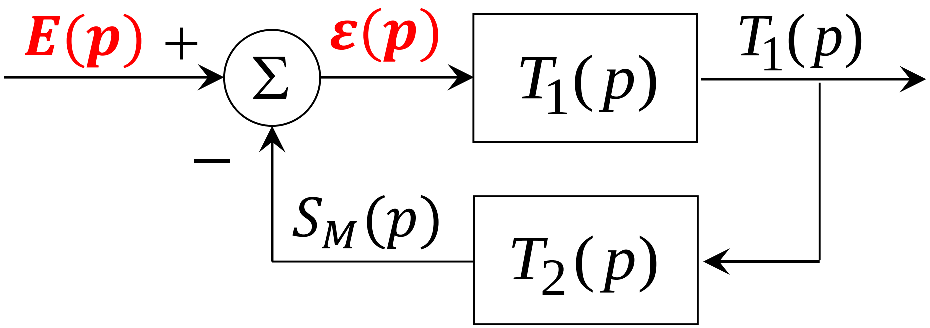
$$S(p) = T_1(p).[E(p) - T_2(p).S(p)]$$

$$S(p) = T_1(p).E(p) - T_1(p).T_2(p).S(p)$$

$$S(p) + T_1(p).T_2(p).S(p) = T_1(p).E(p)$$

$$S(p).[1 + T_1(p).T_2(p)] = T_1(p).E(p)$$

$$\boldsymbol{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{T_1(p)}{1 + T_1(p).T_2(p)}}$$



- ✓ $E(p)$: Signal d'entrée ou de consigne
- ✓ $\varepsilon(p)$: Signal d'erreur

$$T_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = ???$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S_M(p) \qquad S_M(p) = T_2(p).S(p) \qquad S(p) = T_1(p).\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - T_2(p).S(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - T_2(p).T_1(p).\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) + T_1(p).T_2(p).\varepsilon(p) = E(p)$$

$$\varepsilon(p).[1 + T_1(p).T_2(p)] = E(p)$$

$$T_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + T_1(p).T_2(p)}$$

Importance de ces 3 fonctions de transferts

Ces 3 fonctions de transfert vont nous permettre de caractériser le comportement du système asservi :

- **La stabilité sera caractérisée à l'aide de la fonction de transfert du système asservi $T(p)$ ou la fonction de transfert de boucle $B(p)$.**

- **La précision sera caractérisée à l'aide de la fonction de transfert d'erreur $T_\varepsilon(p)$.**

- **La rapidité sera caractérisée à l'aide de la fonction de transfert du système asservi $T(p)$.**