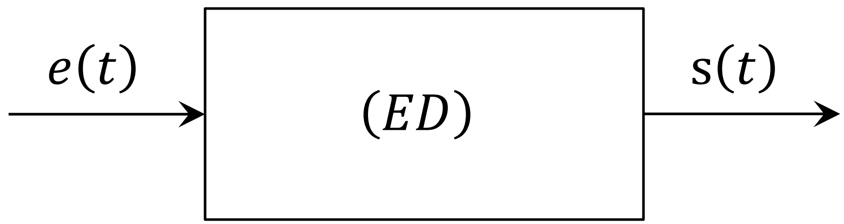
# Chapitre 1 : Système et Réponses

# Système

- Pour nous un « **système** » est un ensemble d'éléments physiques dont le comportement peut évoluer avec le temps.
- Dans ce cours, les systèmes seront représentées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.




**Les systèmes linéaires doivent vérifier les 2 propriétés suivantes :**

- Principe de superposition si : $e(t) = \sum_{k=1}^{m} e_k(t) \rightarrow s(t) = \sum_{k=1}^{m} s_k(t)$.
- Principe d'homogénéité si : $\alpha e(t) \rightarrow \alpha s(t)$.

# Exemples

- $s(t) = (e(t))^3 \rightarrow$ ne vérifie pas la propriété 1.

- $s(t) = ae(t) + b \rightarrow$ ne vérifie pas la propriété 2.

- Systèmes statiques, dynamiques

- Systèmes statiques : La réponse à un signal d'entrée est instantanée. Système sans mémoire (équations E/S sans dérivées).

- Systèmes dynamiques : La réponse dépend du signal d'entrée présent mais aussi du passé du système. Système avec mémoire (équations E/S avec dérivées).

# La résolution des équations différentielles linéaires

a. On note $\boldsymbol{S}(p) = \boldsymbol{L}(s(t))$
b. On exprime $\boldsymbol{L}(s^{'}(t))$ et $\boldsymbol{L}(s^{''}(t))$ en fonction de $\boldsymbol{S}(p)$
c. On détermine la transformée de Laplace du second membre
d. On applique la transformation de Laplace à toute l'équation différentielle
e. On utilise la linéarité de la transformation de Laplace
f. On isole $\boldsymbol{S}(p)$
g. On applique la transformation inverse pour trouver $s(t)$

# Propriété 1 : Linéarité

$$\mathcal{L}\left(s_1(t)+s_2(t)\right)=\mathcal{L}\left(s_1(t)\right)+\mathcal{L}\left(s_2(t)\right)$$

et

$$\mathcal{L}\left(\lambda\, s_1(t)\right)=\lambda\,\mathcal{L}\left(s_1(t)\right)$$

$$\mathcal{L}\left(s_1(t)\times s_2(t)\right)\neq\mathcal{L}\left(s_1(t)\right)\times\mathcal{L}\left(s_2(t)\right)$$

# Propriété 2 : Théorème du retard

Avec $\mathcal{L}(s(t)) = S(p)$

**Facteur de retard**

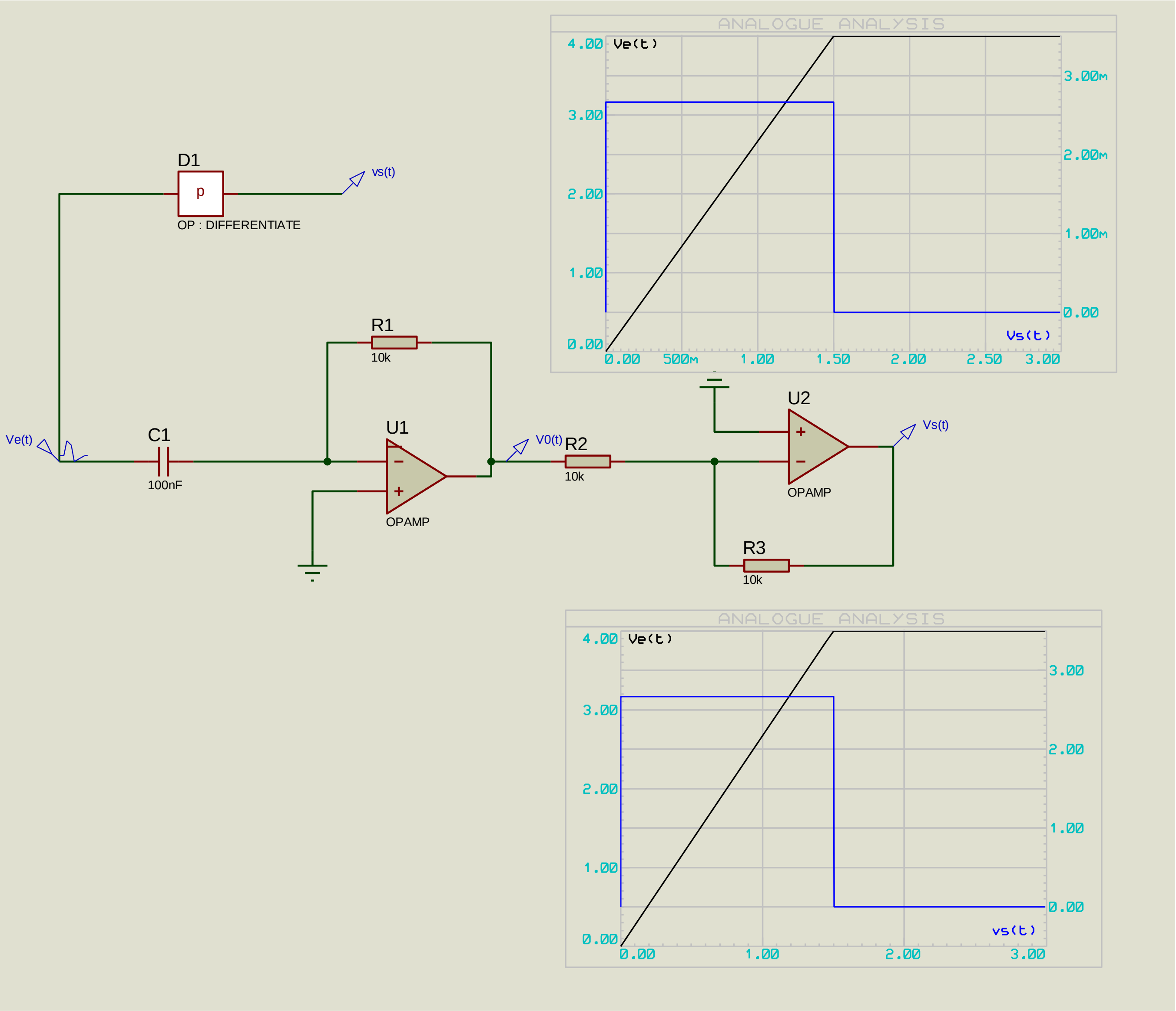
$$\mathcal{L}(s(t-a)) = \mathrm{e}^{-ap} S(p)$$

# Propriété 3 : Dérivée

Avec $\mathcal{L}(s(t)) = S(p)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}(s'(t)) = pS(p) - s(0^-) \\ &\mathcal{L}(s''(t)) = p^2S(p) - ps(0^-) - s'(0^-) \end{aligned}}$$

# Exemple



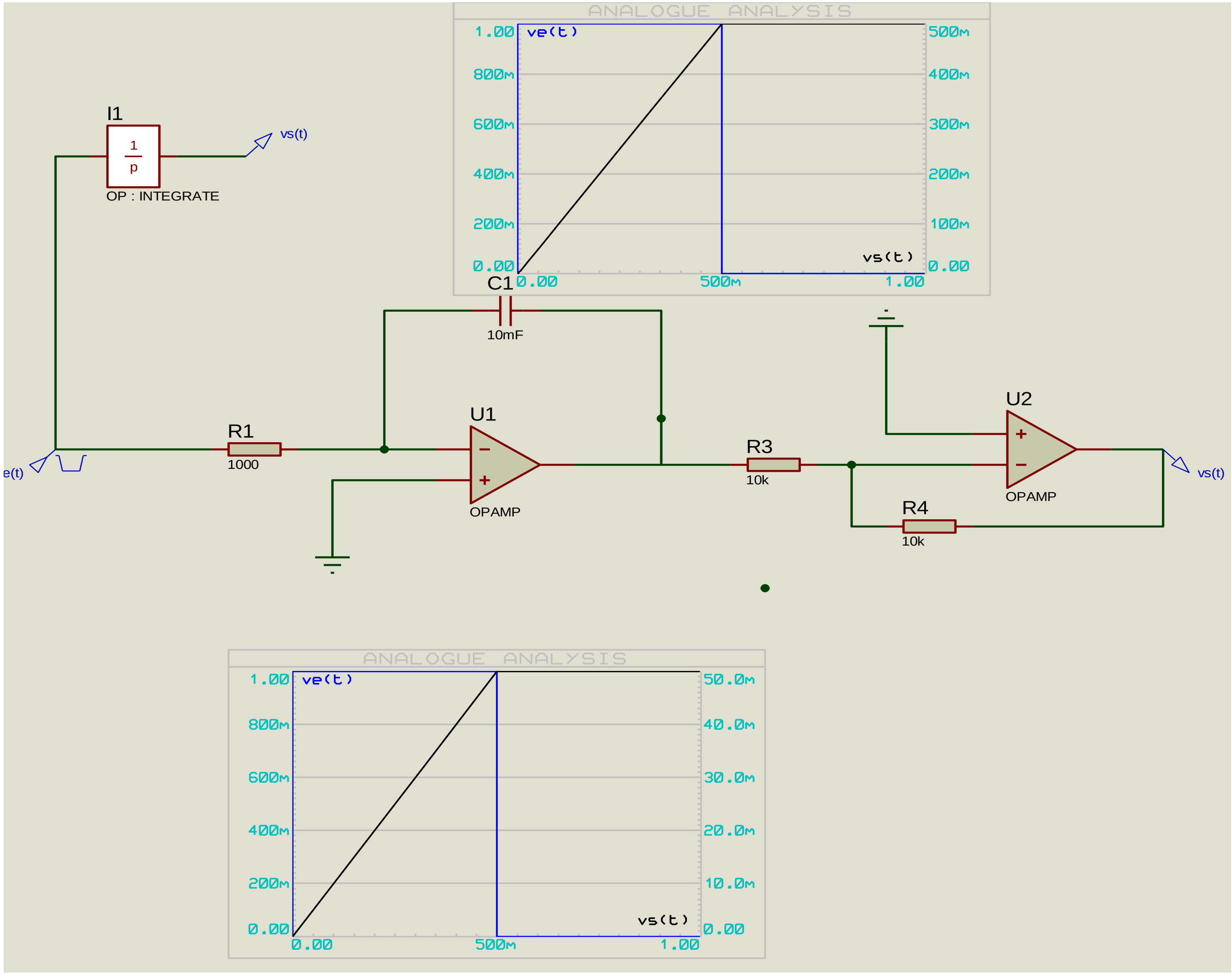
D1
p
OP : DIFFERENTIATE
vs(t)
R1
10k
Ve(t)
C1
100nF
U1
OPAMP
V0(t)
R2
10k
U2
OPAMP
Vs(t)
R3
10k
ANALOGUE ANALYSIS
Ve(t)
Vs(t)
ANALOGUE ANALYSIS
Ve(t)
vs(t)

# Propriété 4 : Primitive

Avec $\mathcal{L}(s(t)) = S(p)$

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^{t} s(x)dx\right) = \frac{S(p)}{p}}$$

# Exemple



ANALOGUE ANALYSIS
1.00
800m
600m
400m
200m
0.00
ve(t)
vs(t)
500m
400m
300m
200m
100m
0.00
0.00
500m
1.00
I1
1
p
OP : INTEGRATE
vs(t)
C1
10mF
R1
1000
e(t)
U1
OPAMP
R3
10k
U2
OPAMP
R4
10k
vs(t)
ANALOGUE ANALYSIS
1.00
800m
600m
400m
200m
0.00
ve(t)
vs(t)
50.0m
40.0m
30.0m
20.0m
10.0m
0.00
0.00
500m
1.00

# Propriété 5 : Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Avec $\mathcal{L}(s(t)) = S(p)$

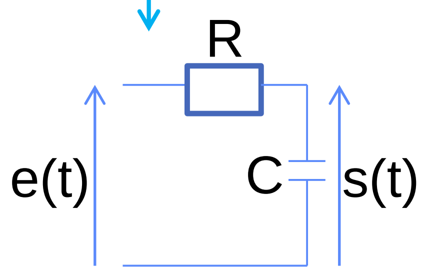
$$\boxed{\begin{aligned} s(0^+) &= \lim_{p \to +\infty} pS(p) \\ s(+\infty) &= \lim_{p \to 0} pS(p) \end{aligned}}$$

# Exemple circuit RC

**Calcul symbolique**

$$e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p)$$

**Modèle mathématique : Equation différentielle**



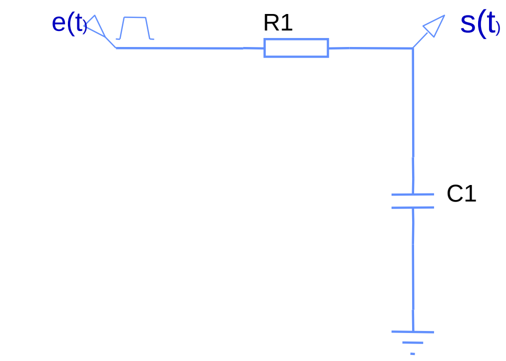

$$RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

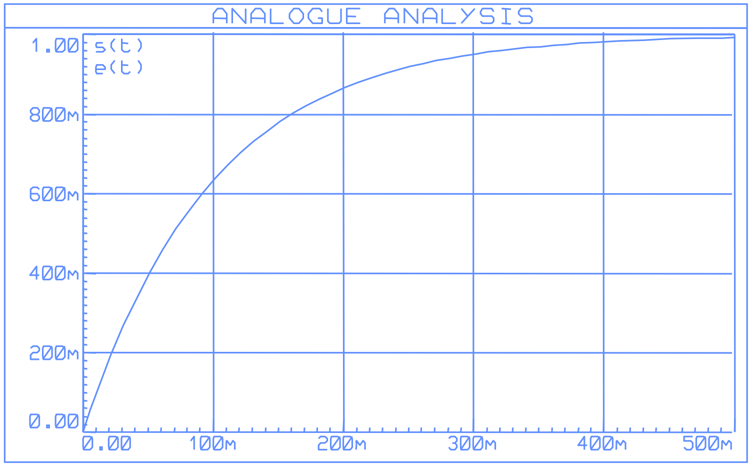
**Equation algébrique**

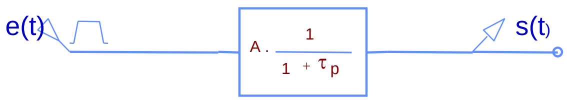
$$S(p) = \frac{1}{1+RCp}E(p)$$

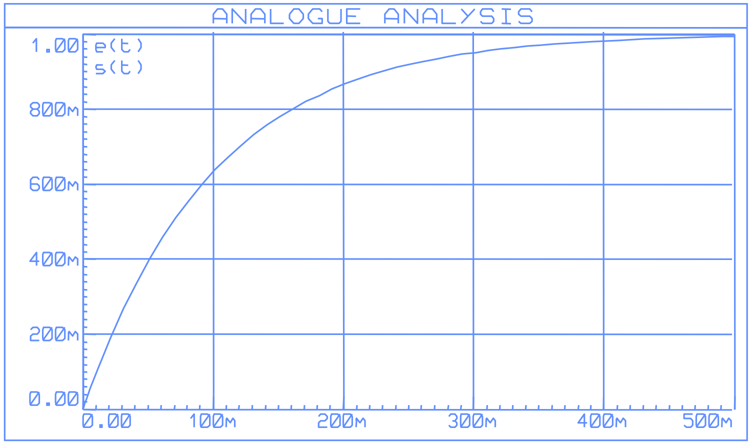
Avec CI nulles

$$s(t) = \text{fonction de } t \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} S(p)$$




**Avec le Calcul Symbolique**

**Signaux standards :**

- $e(t) = \delta(t) \rightarrow$ s(t) porte le nom de réponse impulsionnelle.

- $e(t) = u(t) \rightarrow$ s(t) porte le nom de réponse indicielle.

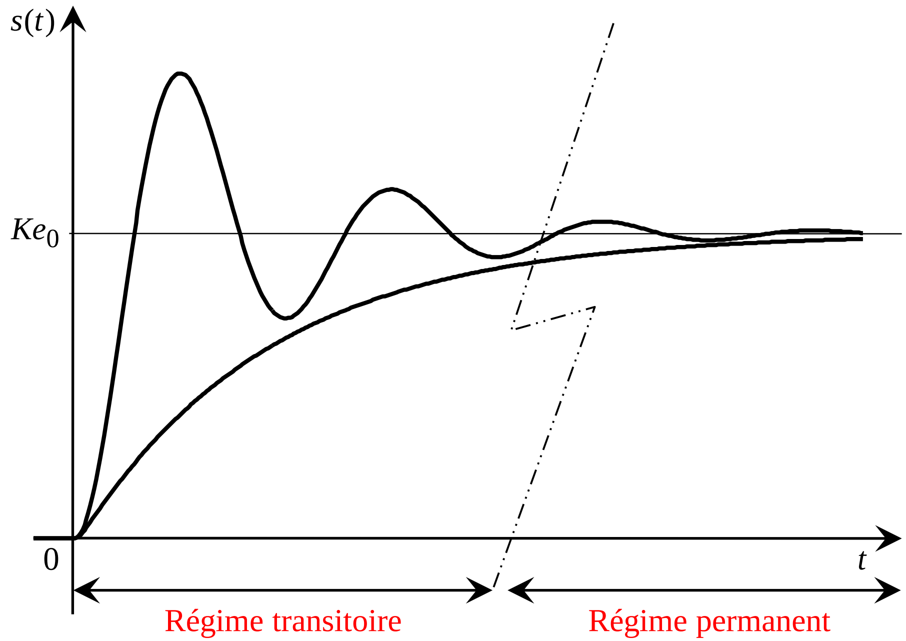
**Autres signaux :**

- $e(t) = t.u(t) \rightarrow$ s(t) porte le nom de réponse à un échelon de vitesse.

- $e(t) = \cos(\omega.t)u(t) \rightarrow$ s(t) porte le nom de réponse à un échelon sinusoïdal.

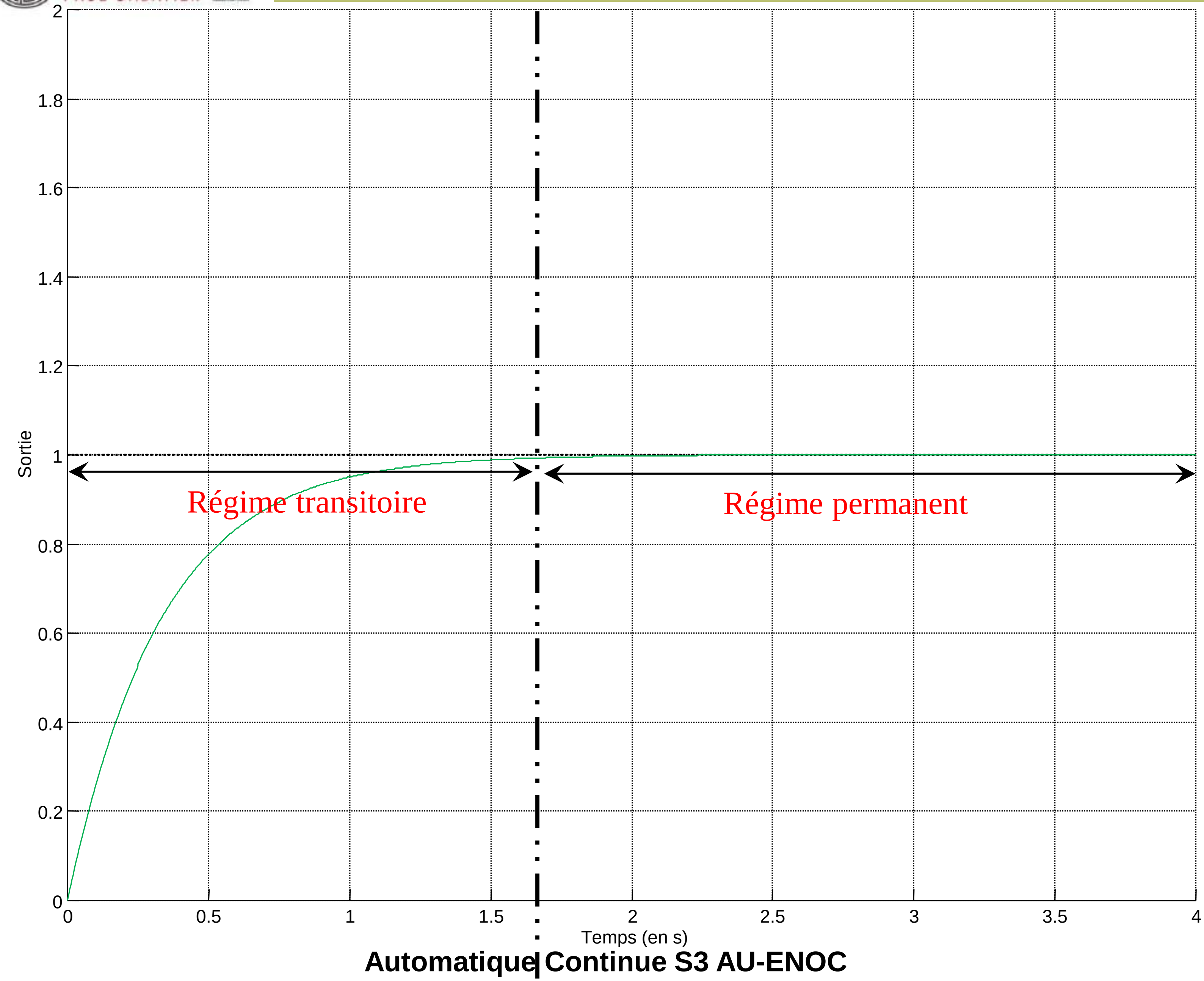
# Cas de la réponse indicielle

Afin de pouvoir visualiser ces réponses temporelles, il est nécessaire que le système vérifie un critère particulier (de stabilité, entrée bornée/sortie bornée). Si le système est stable, il sera possible d'observer la réponse temporelle du système.

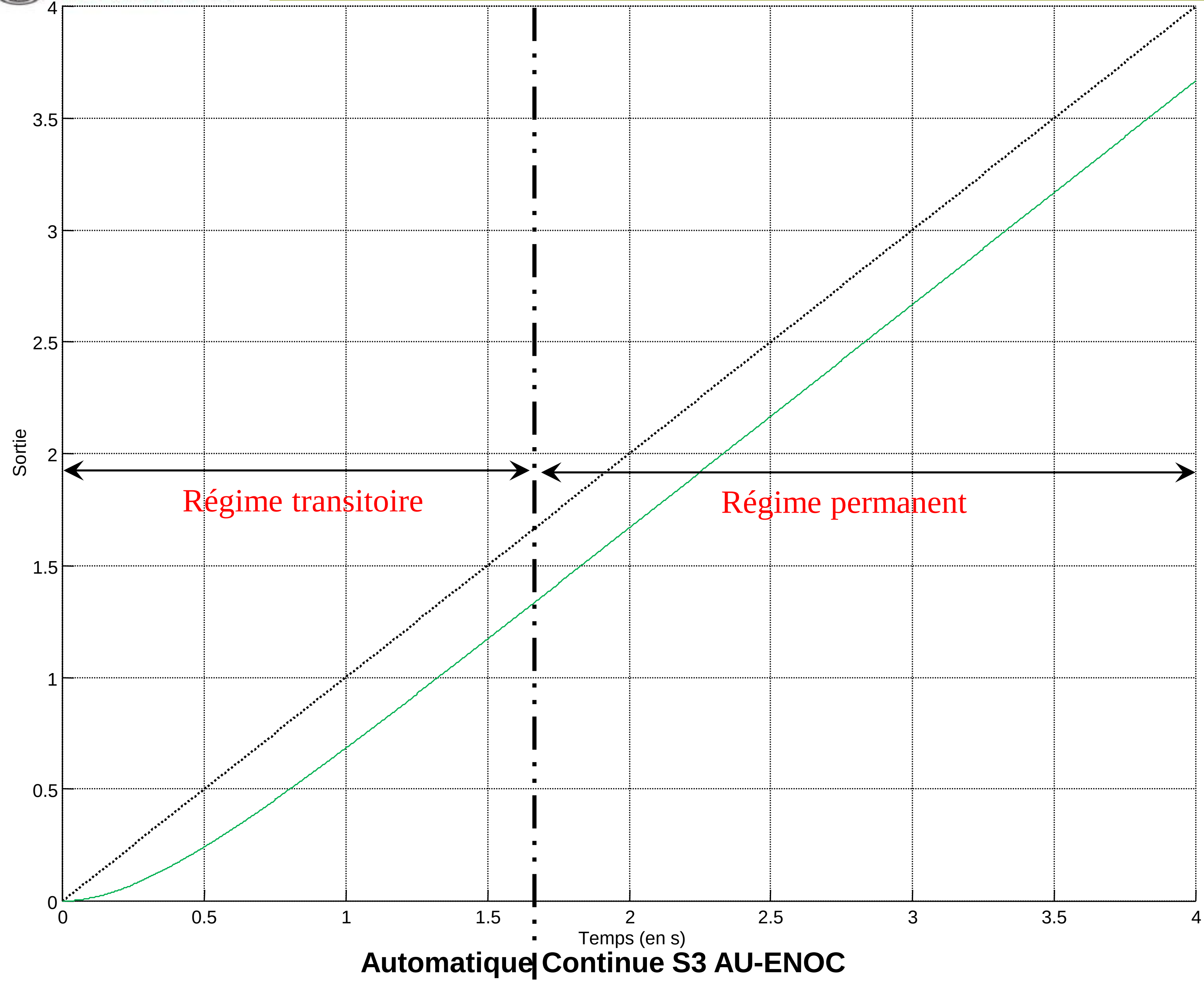



**Remarque :** Quelque soit le signal d'entrée, la durée du transitoire est la même.

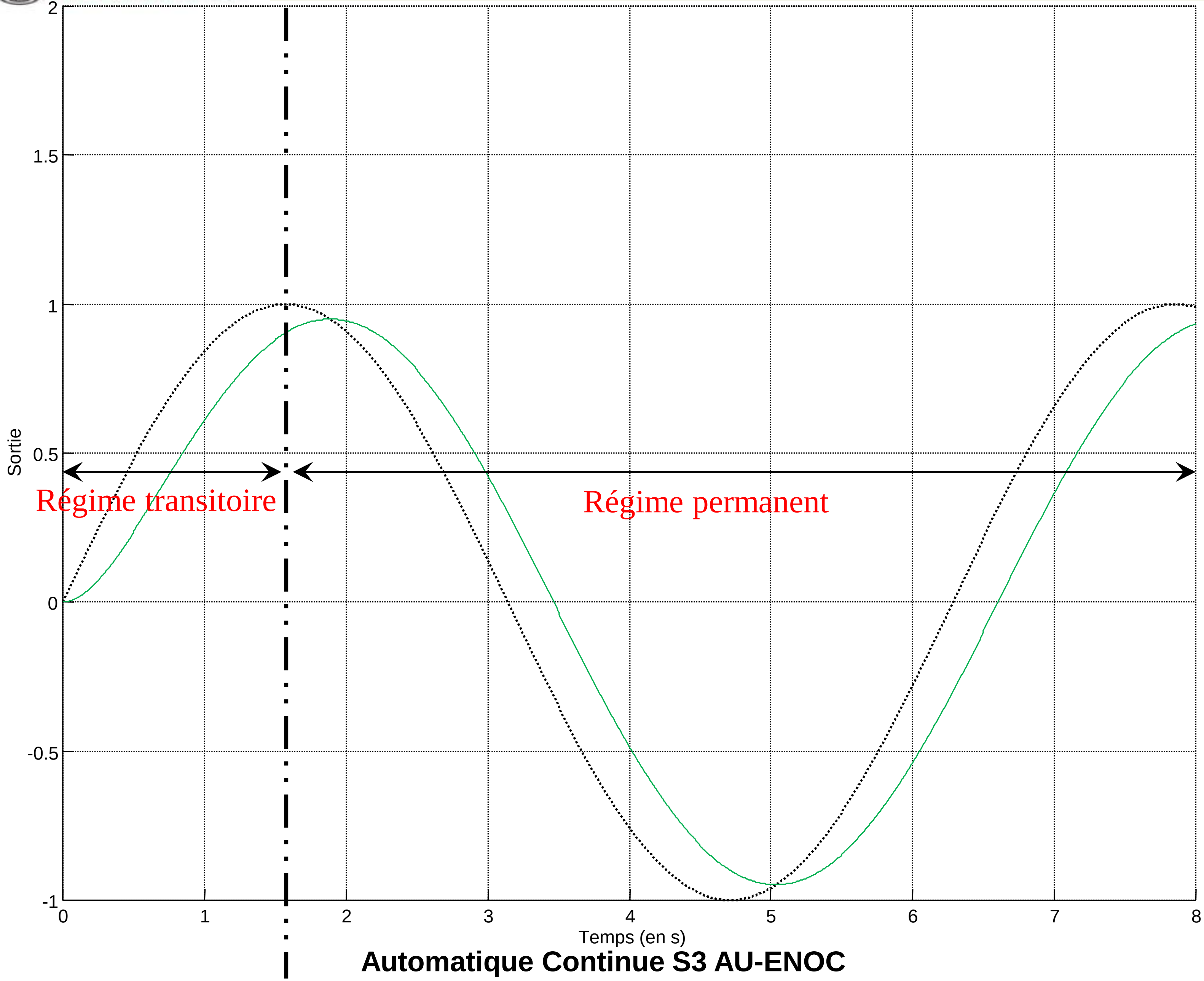
# Réponse indicielle (1$^{er}$ ordre)



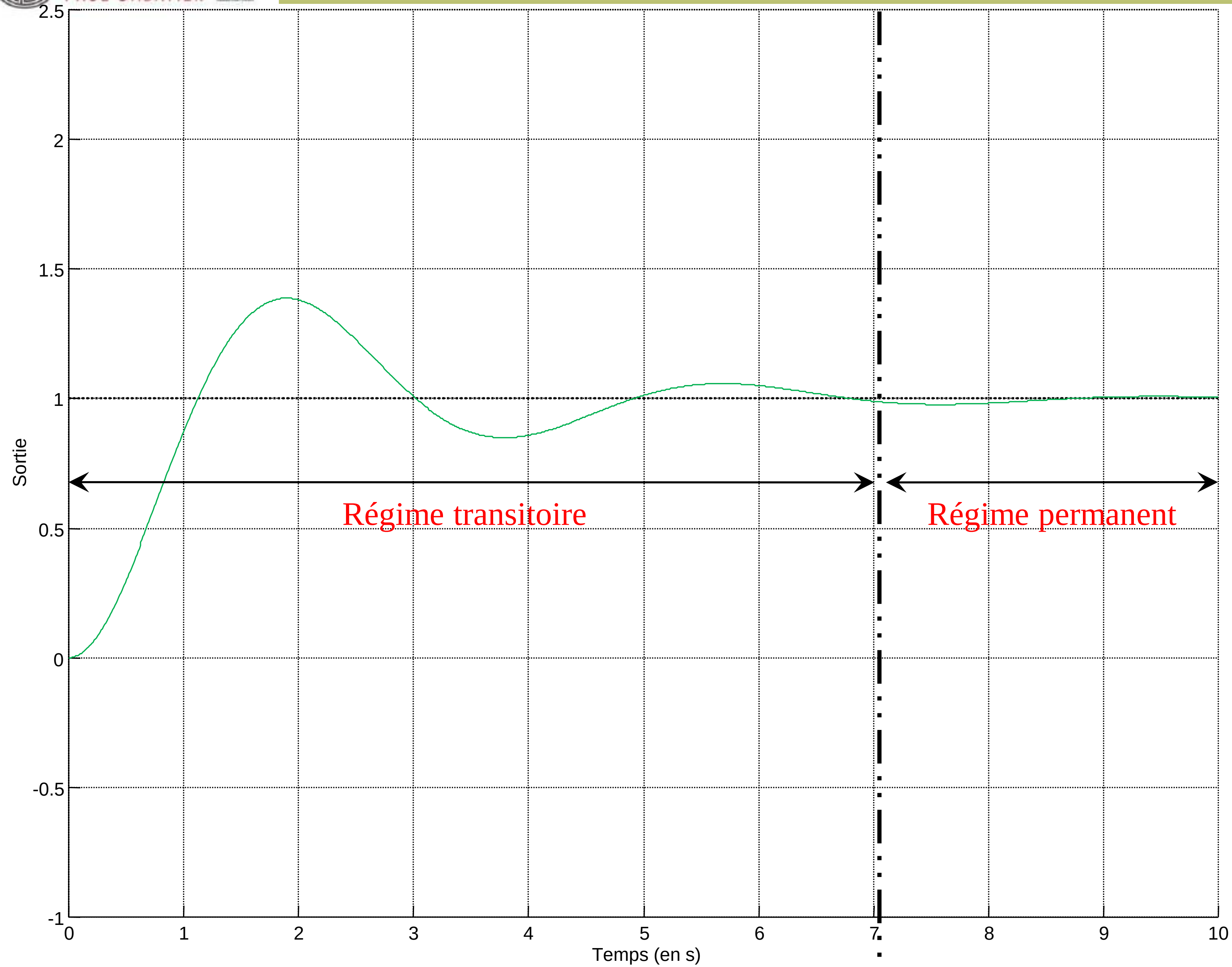
# Réponse à un échelon de vitesse ($1^{er}$ ordre)



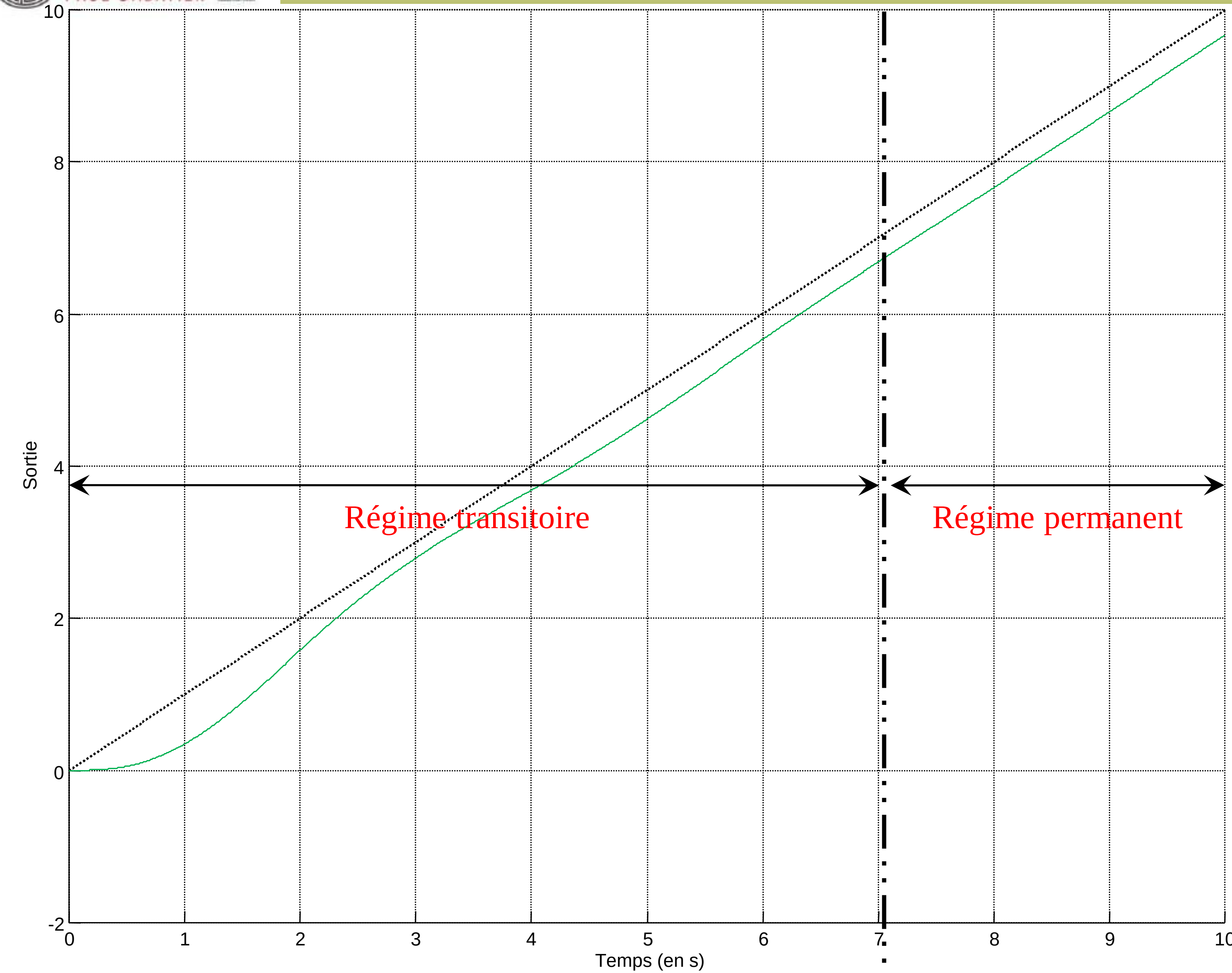
# Réponse à un échelon sinusoïdal (1er ordre)



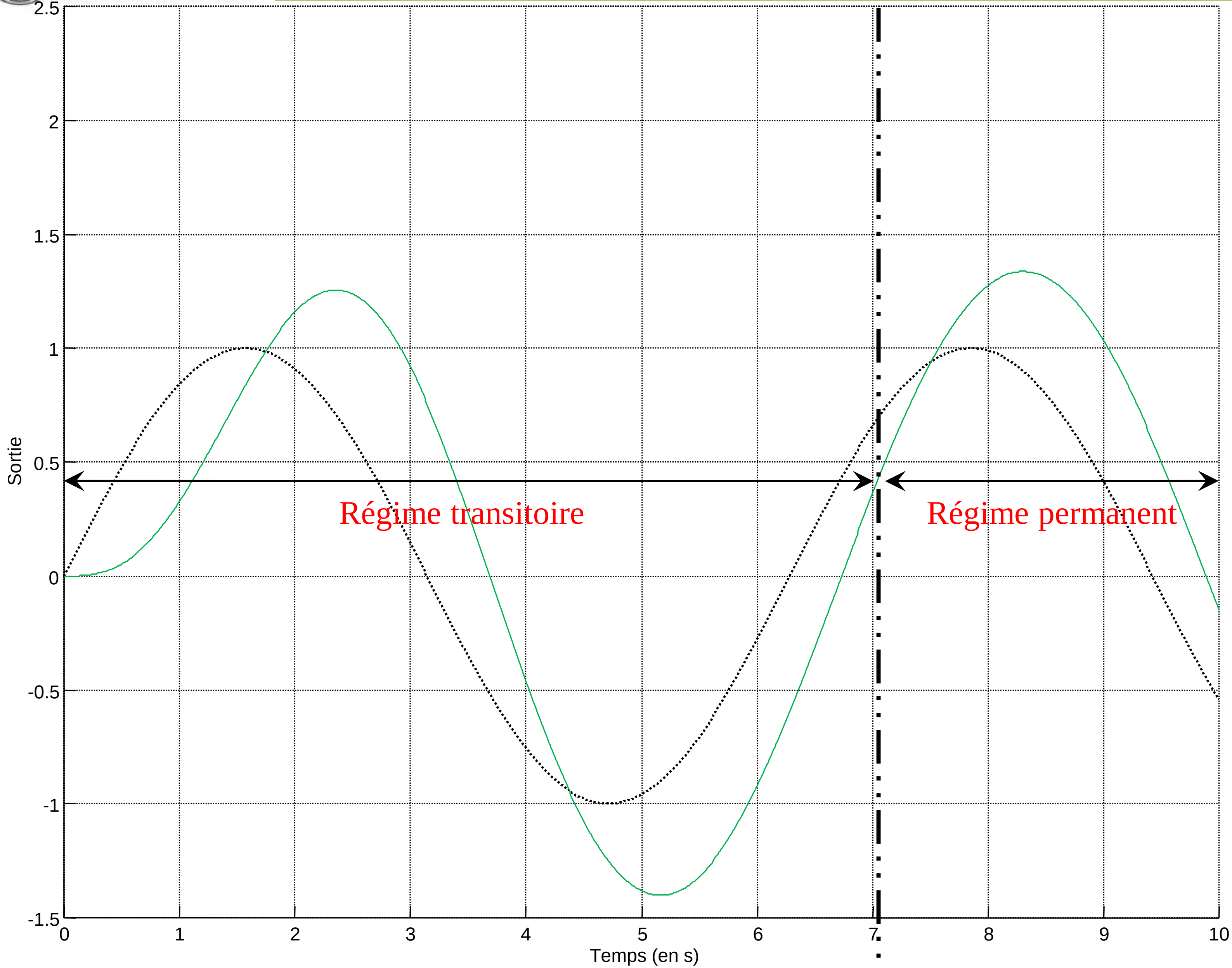
# Réponse indicielle (2ème ordre)



# Réponse à un échelon de vitesse (2ème ordre)



# Réponse à un échelon sinusoïdal (2$^{ème}$ ordre)



# Calcul de la réponse temporelle

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}(ED)\\ + \text{C.I.}\end{matrix}} \longrightarrow s(t)$$

$$(ED) + \text{C.I.} \xrightarrow{\quad\mathcal{L}\quad} \boldsymbol{S(p) = T(p).E(p) + T_{CI}(p)}$$

**Remarque :** Cette expression est indépendante du choix de $e(t)$ et des conditions initiales.

$$\boldsymbol{S(p) = S_F(p) + S_L(p)}$$

# Structure de la solution

$S_F(p) = T(p).E(p)$ porte le nom de réponse forcée.

- ✓ Elle est égale à $S(p)$ si les $C.I. = 0$
- ✓ Elle s'annule quand $E(p) = 0$.

$S_F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ $s_F(t)$ cette réponse est dépendante de $e(t)$ et indépendante des $C.I.$.

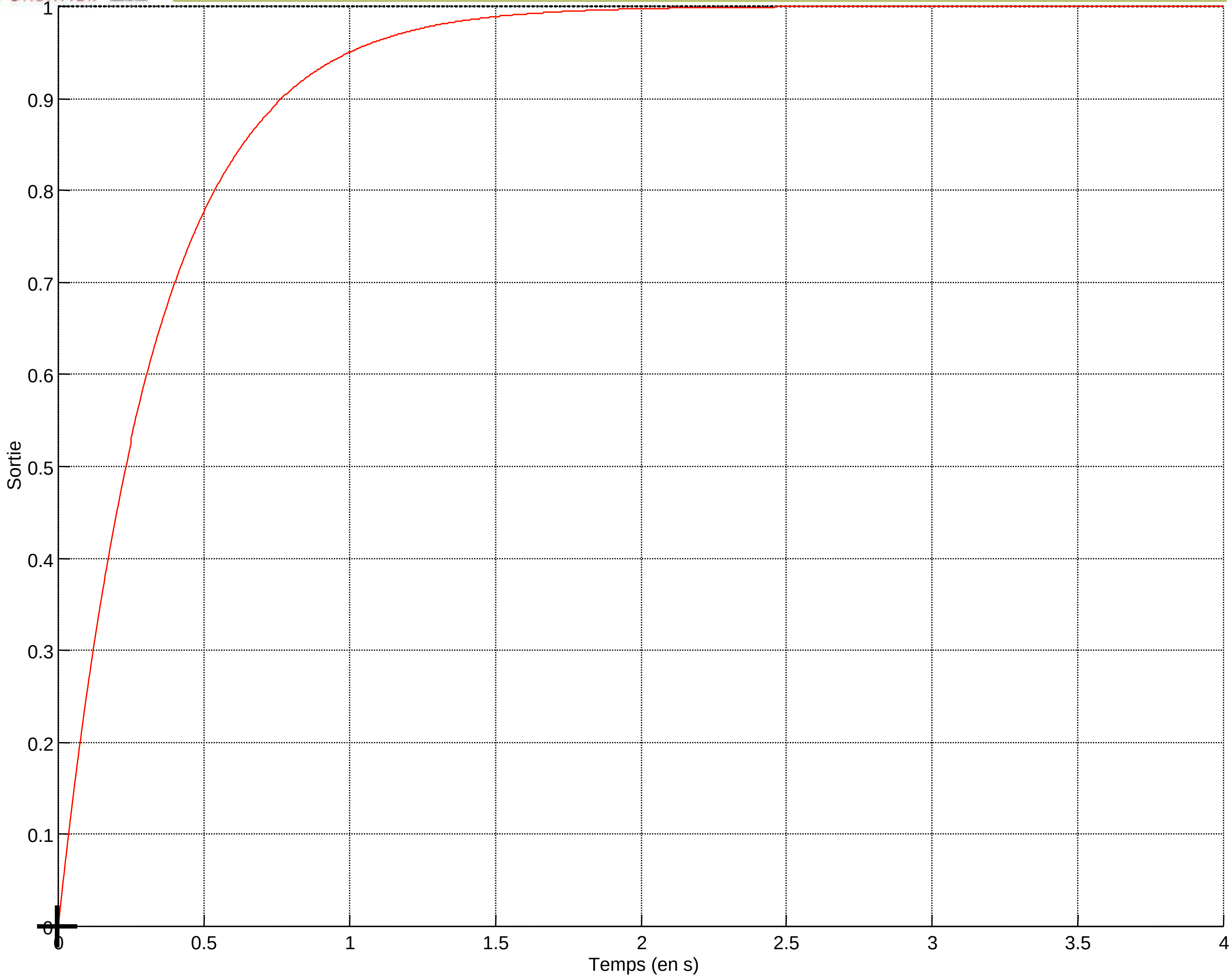
$S_L(p) = T_{CI}(p)$ porte le nom de réponse libre.

- ✓ Elle est égale à $S(p)$ si $E(p) = 0$
- ✓ Elle s'annule quand les $C.I. = 0$.

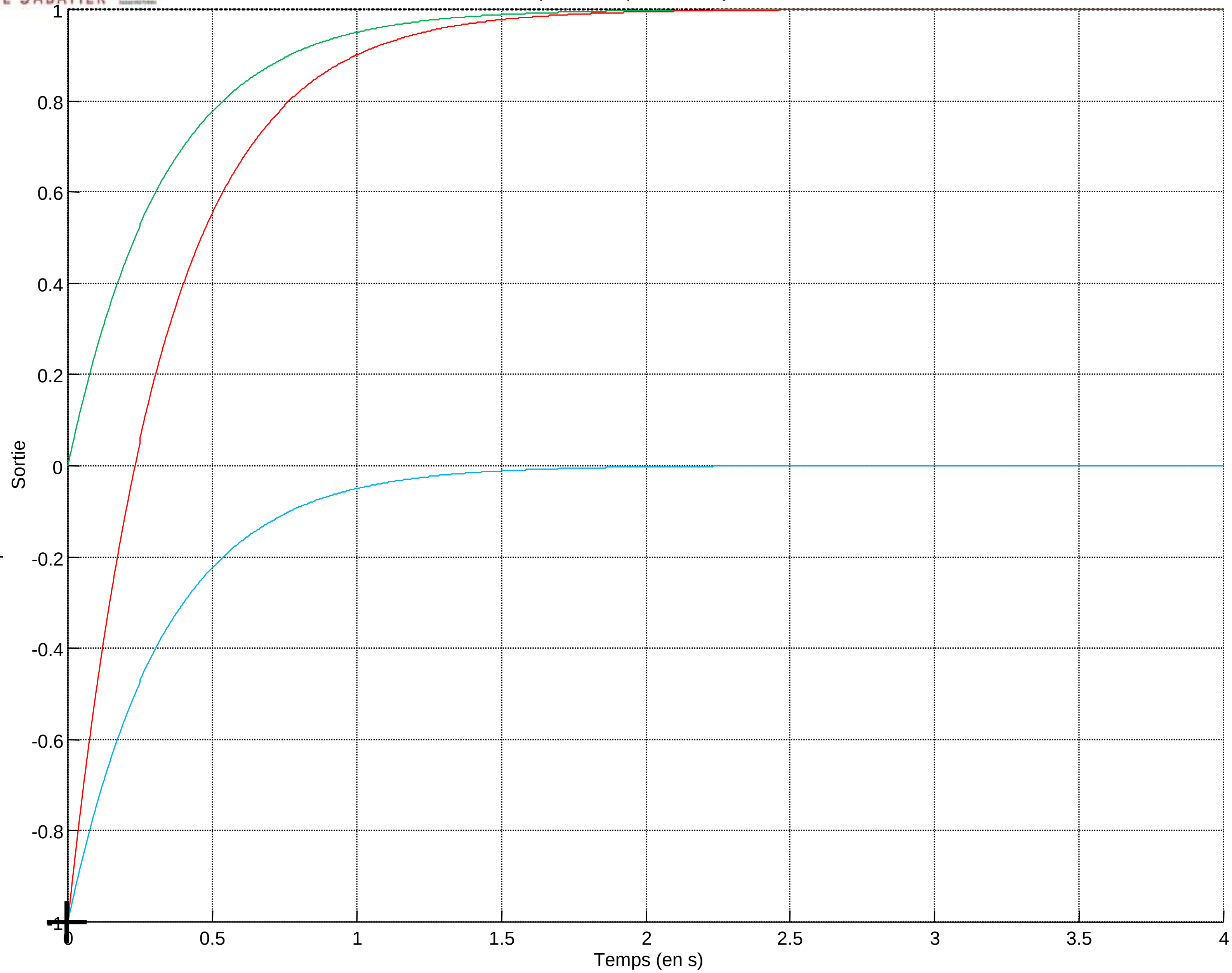
$S_L(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ $s_L(t)$ cette réponse est dépendante des $C.I.$ et indépendante de $e(t)$.

# Réponse indicielle (1er ordre)

$s(t)$
$s_F(t)$
$s_L(t)$
$s(0^-) = 0$



# Réponse indicielle (1er ordre)




$s(t)$

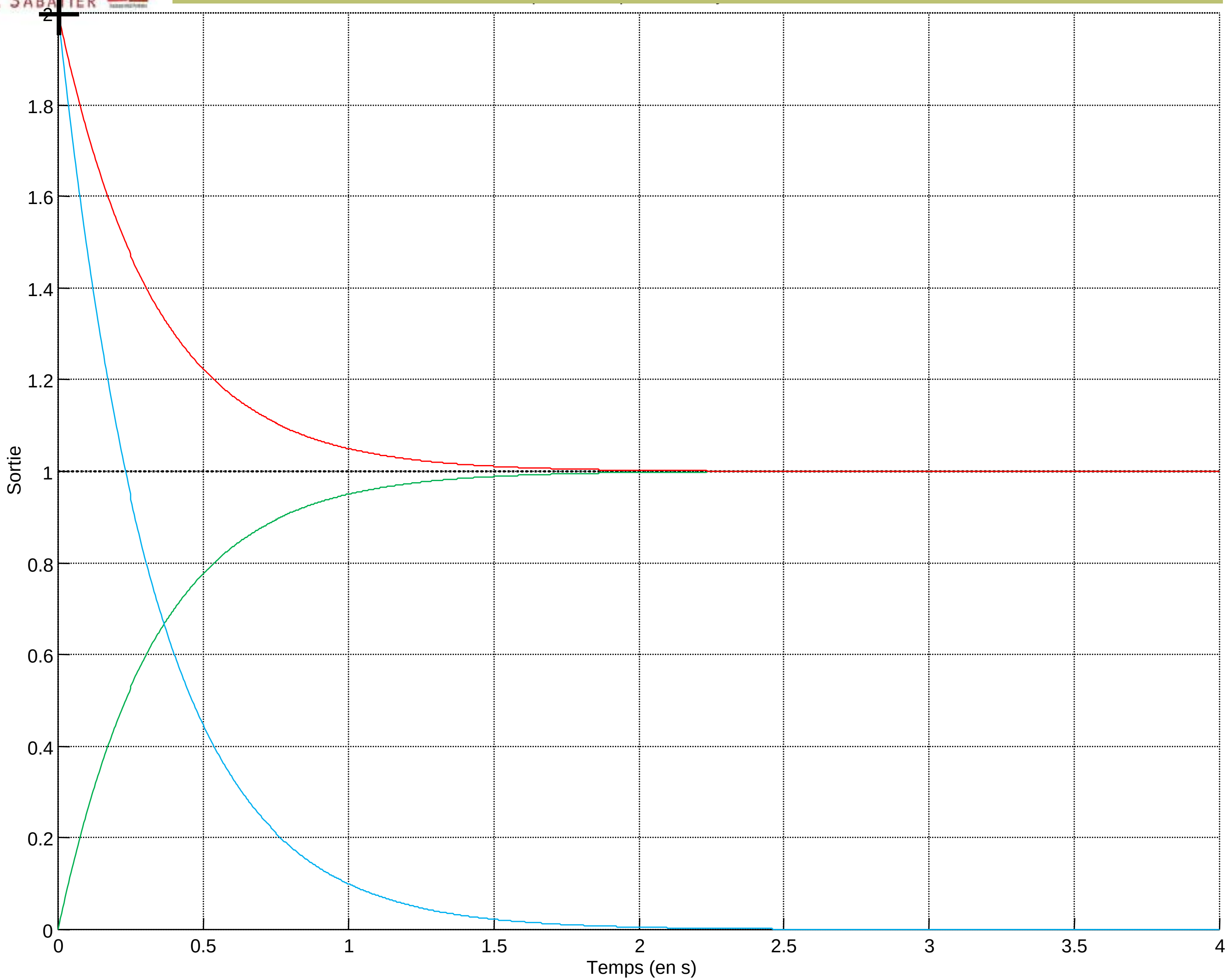
$s_F(t)$

$s_L(t)$

$s(0^-) = -1$

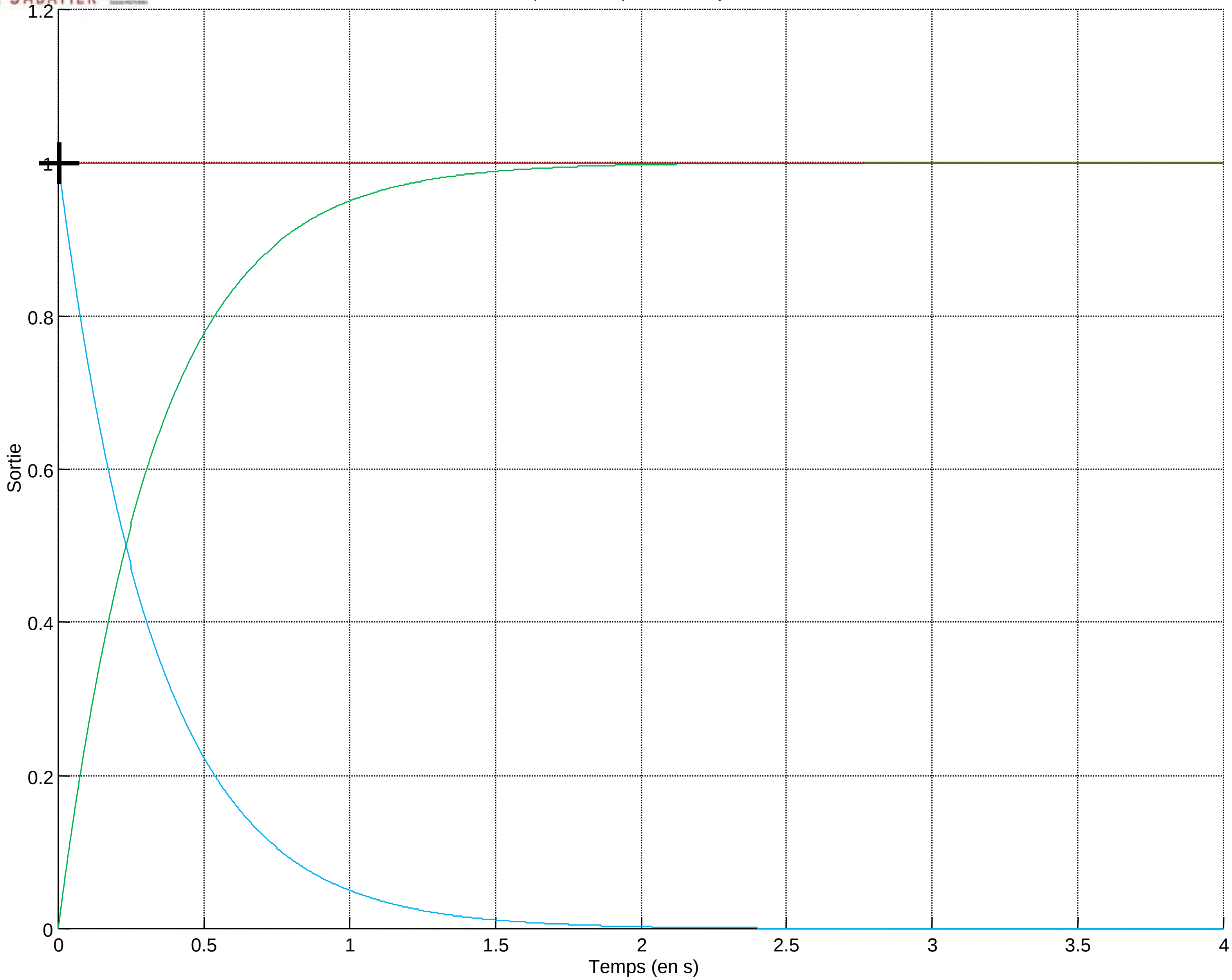
# Réponse indicielle (1er ordre)

$s(t)$
$s_F(t)$
$s_L(t)$
$s(0^-) = 2$

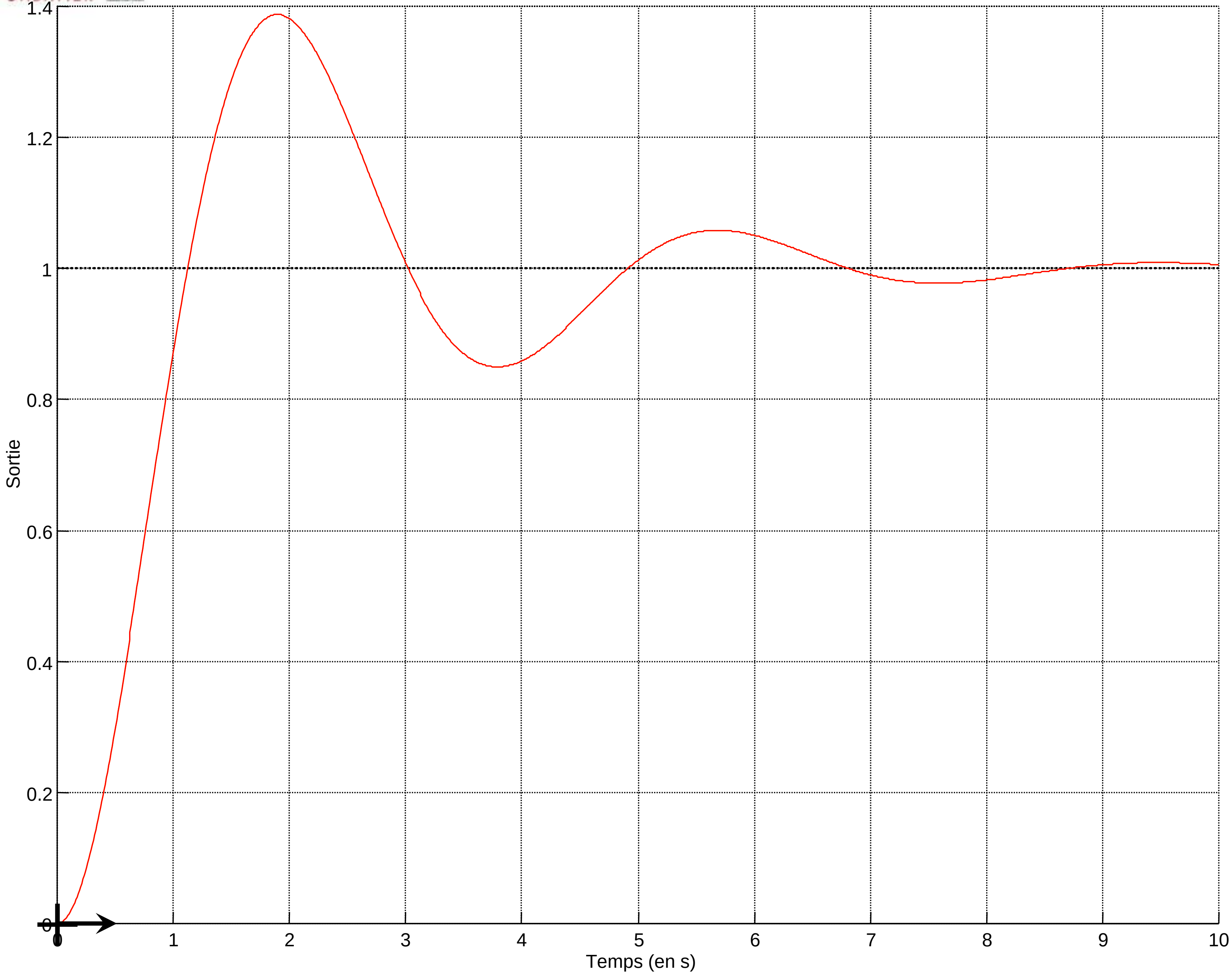


# Réponse indicielle (1^er ordre)

$s(t)$
$s_F(t)$
$s_L(t)$
$s(0^-) = 1$



# Réponse indicielle (2ème ordre)




$\boldsymbol{s(t)}$

$\boldsymbol{s_F(t)}$

$\boldsymbol{s_L(t)}$

$s(0^-) = 0$

$s'(0^-) = 0$

# Réponse indicielle (2$^{\text{ème}}$ ordre)

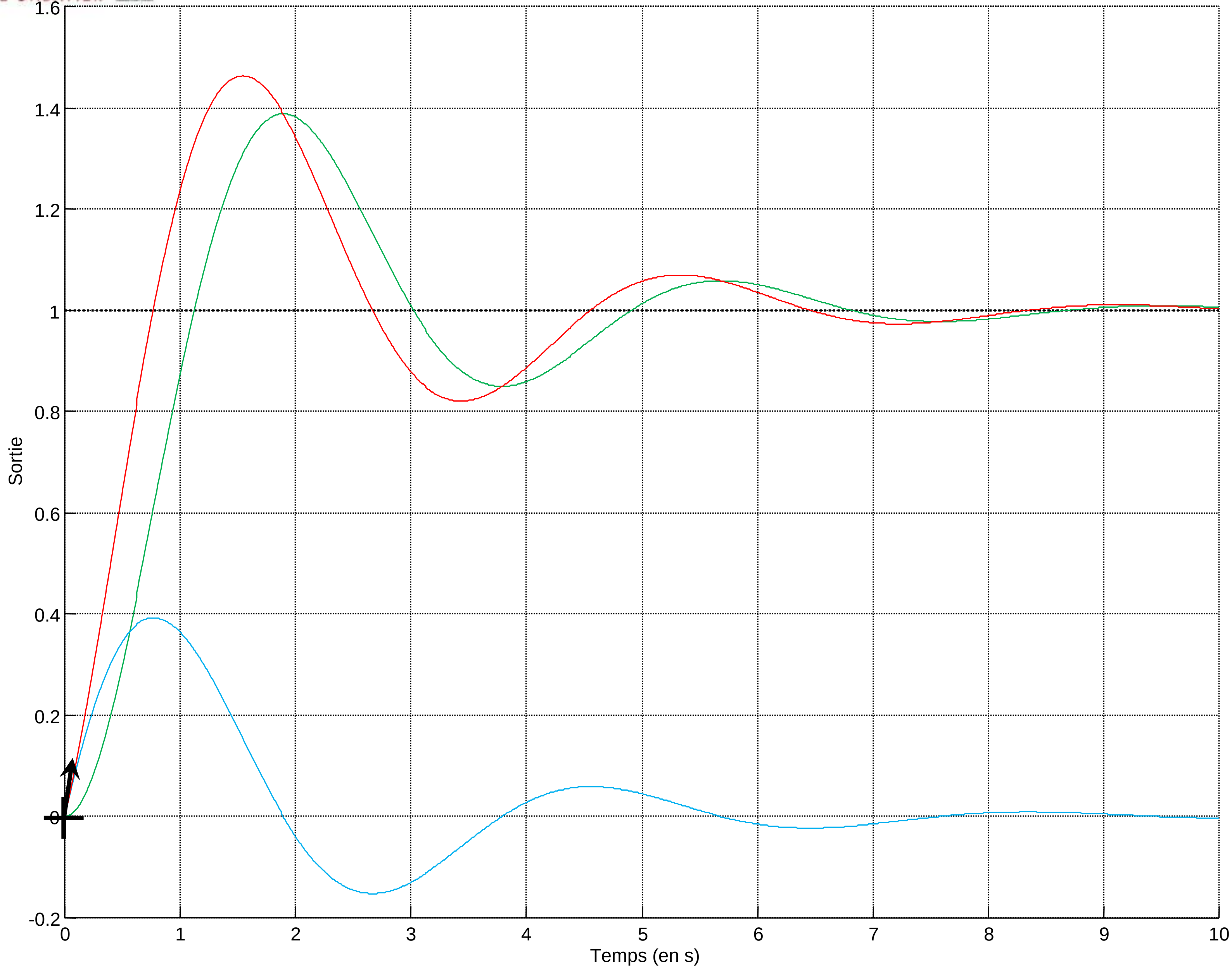
$\color{red}{s(t)}$

$\color{green}{s_F(t)}$

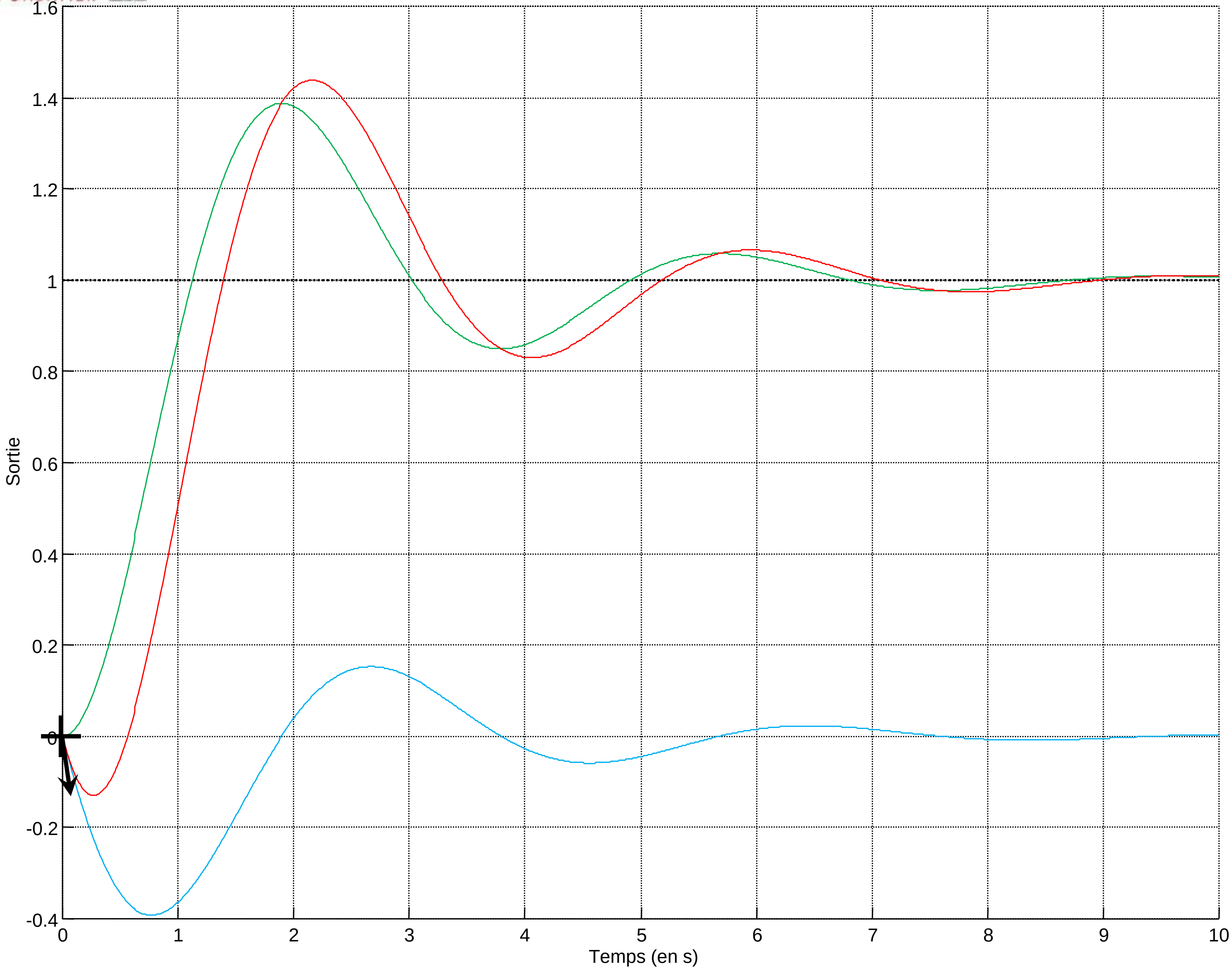
$\color{cyan}{s_L(t)}$

$s(0^-) = 0$

$s'(0^-) > 0$



$\boldsymbol{s(t)}$
$\boldsymbol{s_F(t)}$
$\boldsymbol{s_L(t)}$
$s(0^-) = 0$
$s'(0^-) < 0$



# Réponse indicielle ($2^{ème}$ ordre)

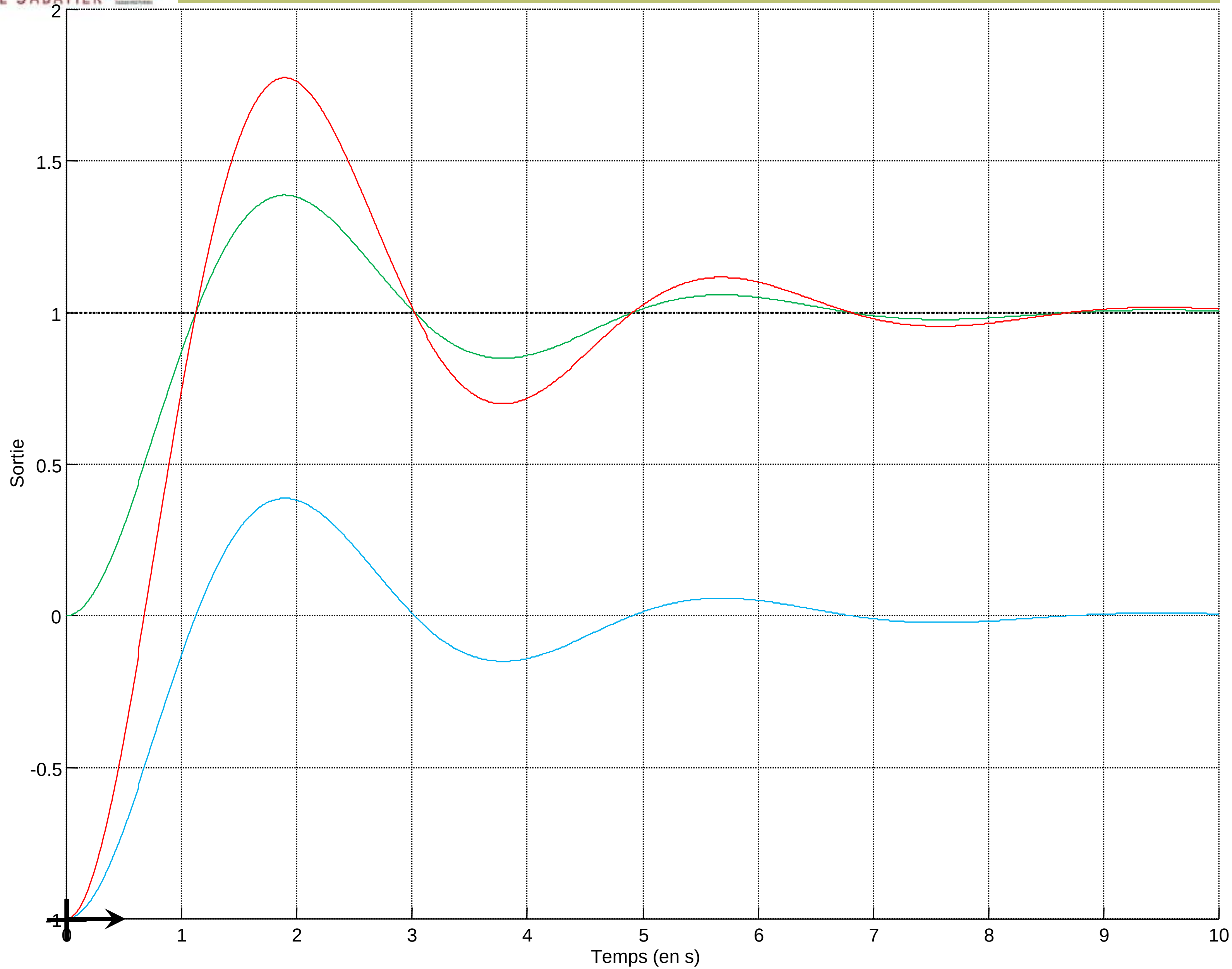
$s(t)$

$s_F(t)$

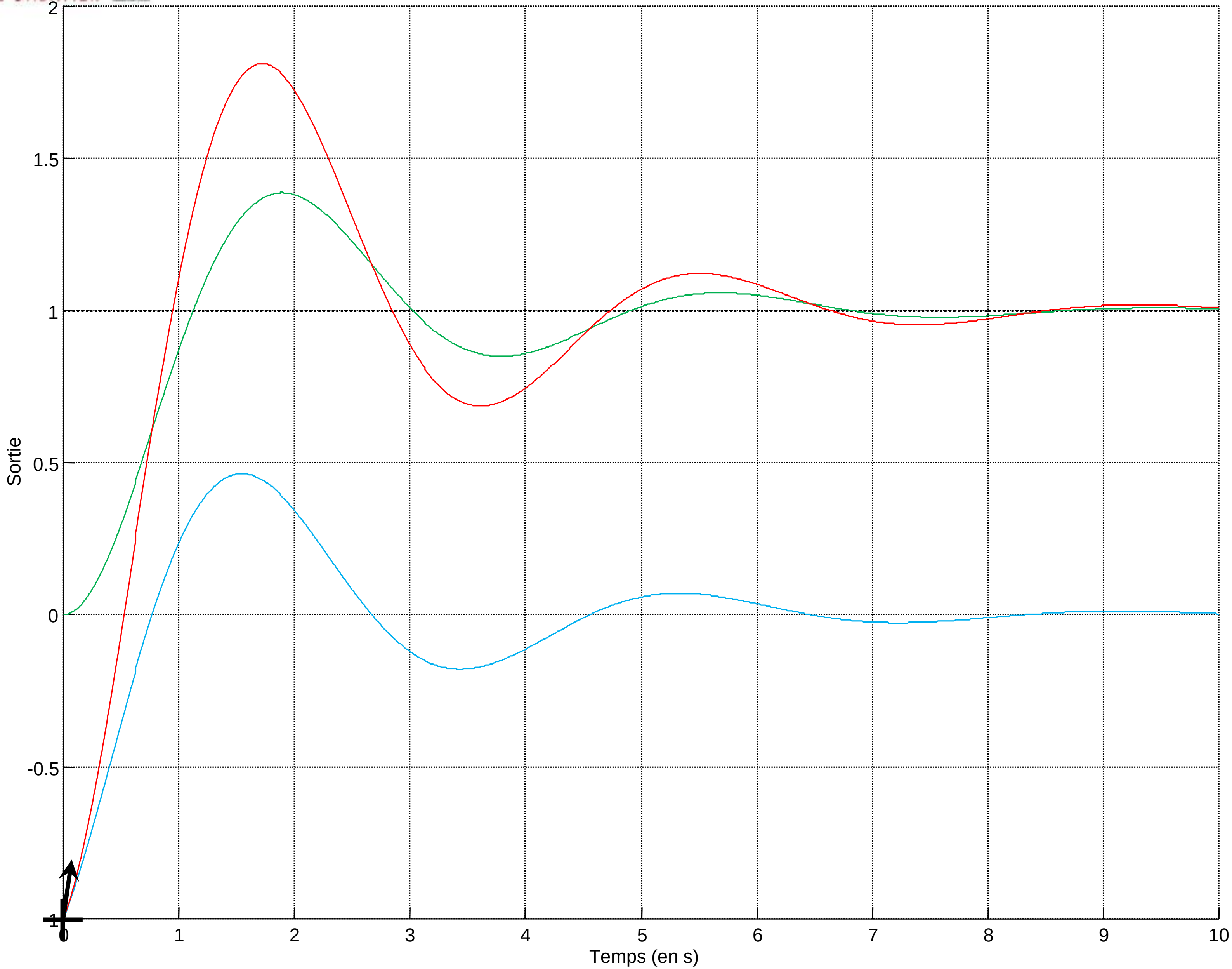
$s_L(t)$

$s(0^-) = -1$

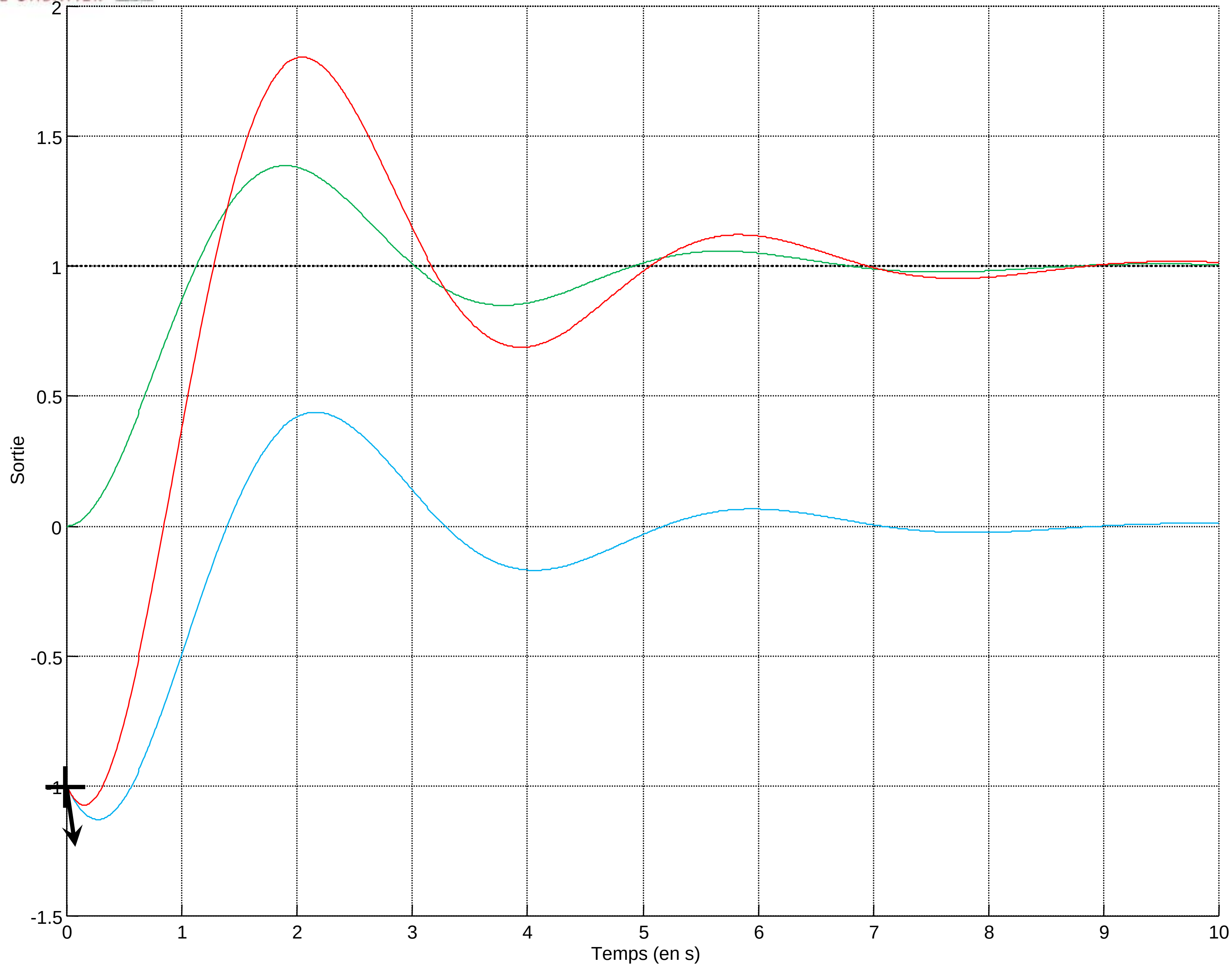
$s'(0^-) = 0$



$s(t)$
$s_F(t)$
$s_L(t)$
$s(0^-) = -1$
$s'(0^-) > 0$



# Réponse indicielle (2ème ordre)




$s(t)$

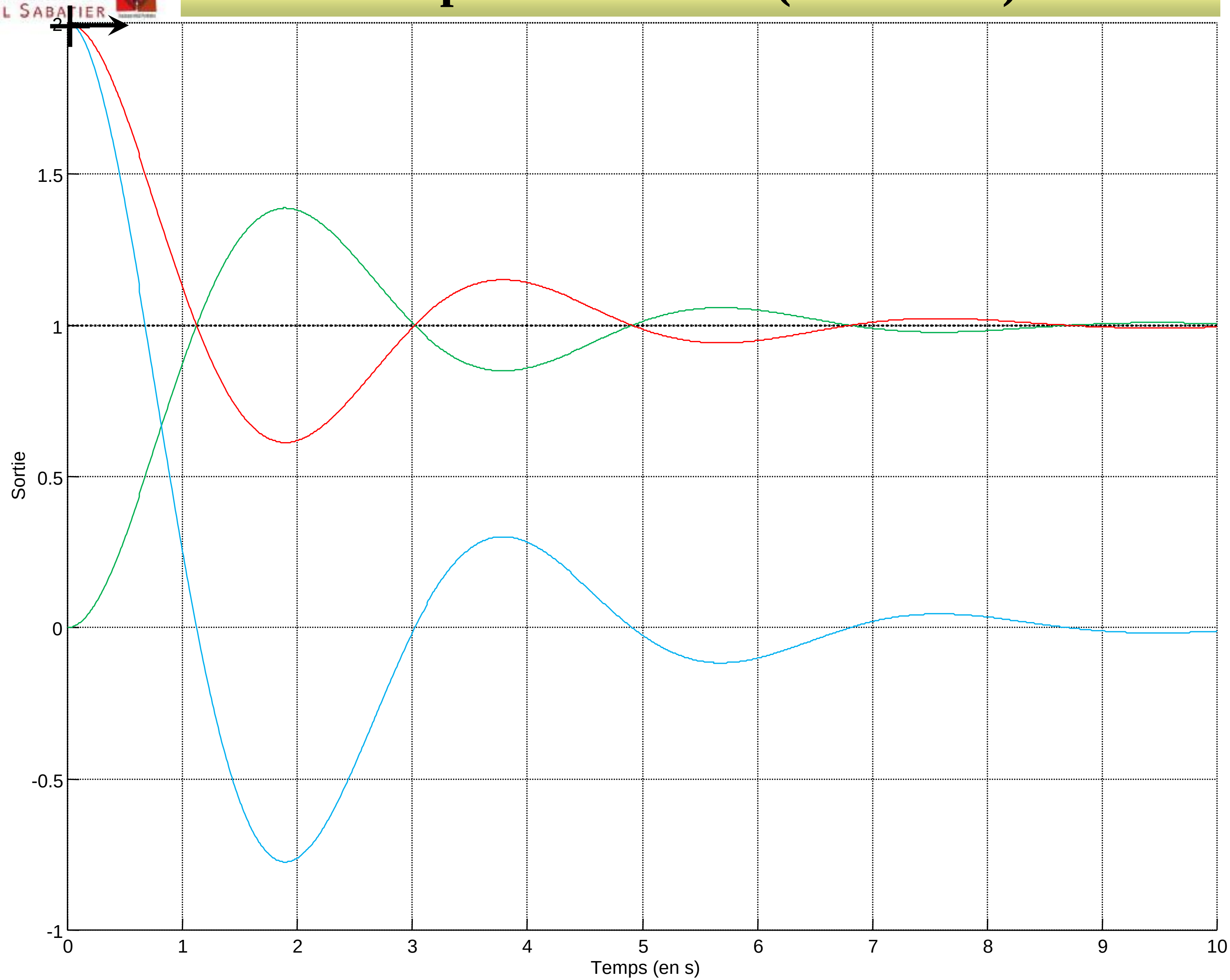
$s_F(t)$

$s_L(t)$

$s(0^-) = -1$

$s'(0^-) < 0$

# Réponse indicielle (2$^{ème}$ ordre)




$\boldsymbol{s(t)}$

$\boldsymbol{s_F(t)}$

$\boldsymbol{s_L(t)}$

$s(0^-) = 2$

$s'(0^-) = 0$

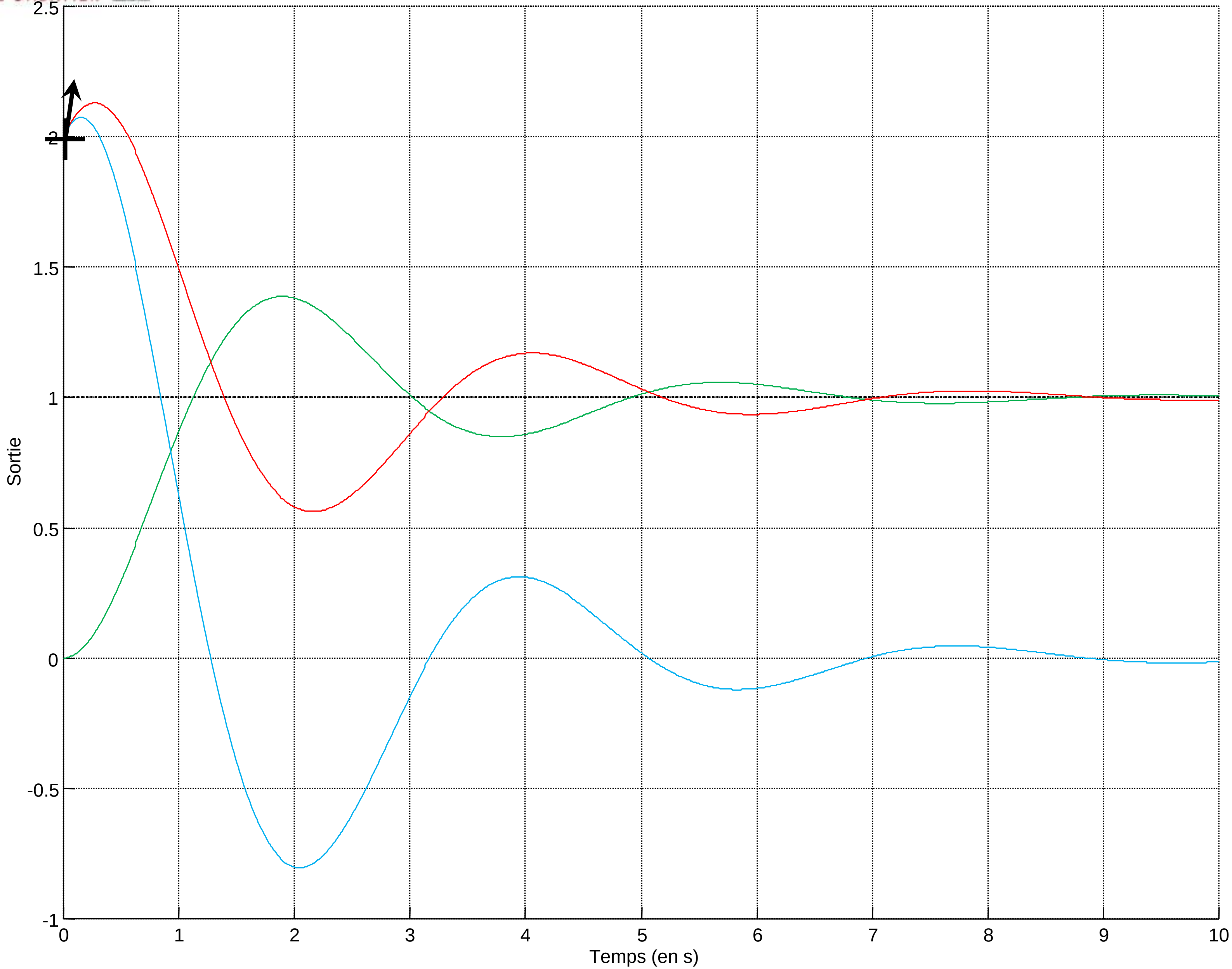
$\boldsymbol{s(t)}$

$\boldsymbol{s_F(t)}$

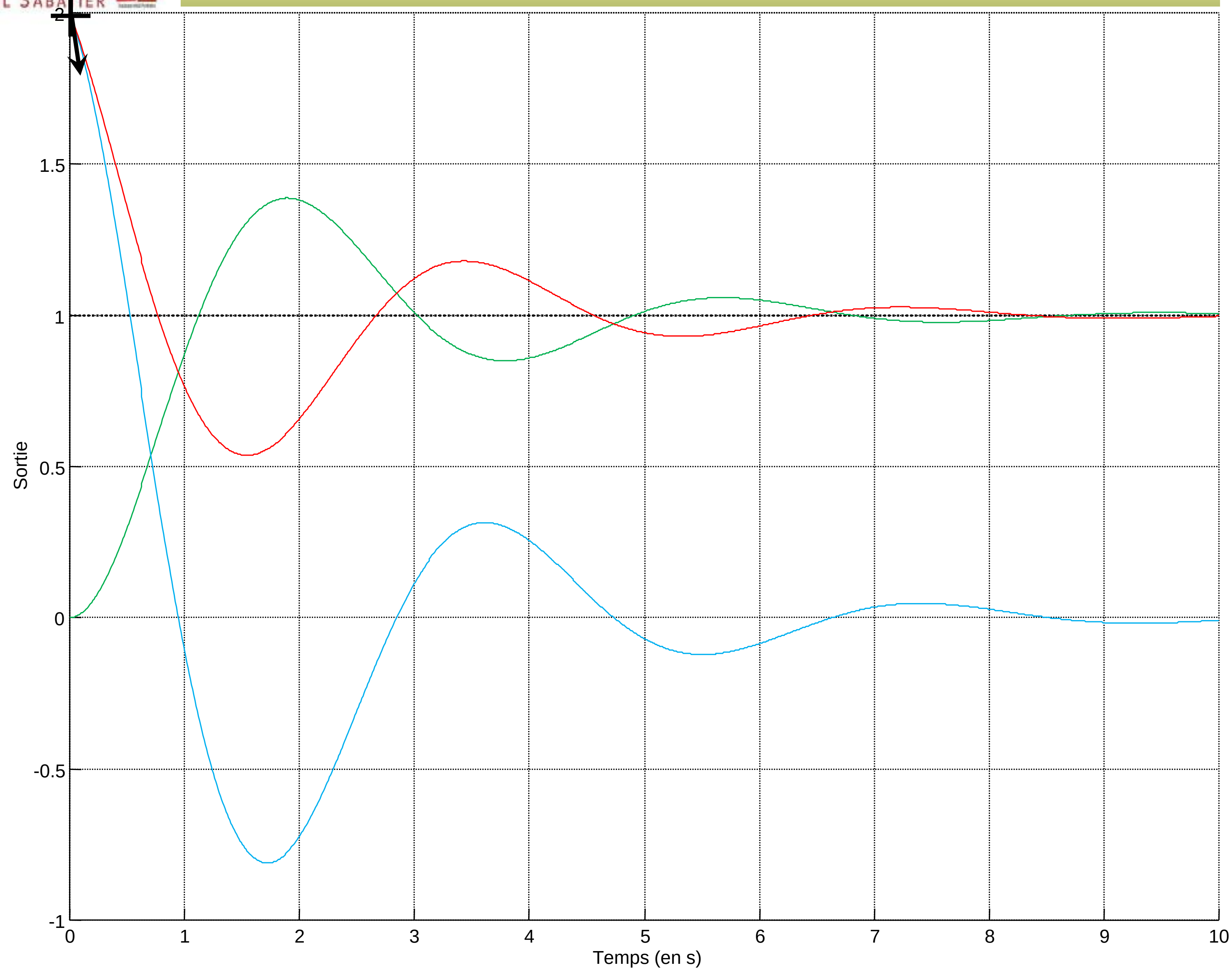
$\boldsymbol{s_L(t)}$

$s(0^-) = 2$

$s'(0^-) > 0$



# Réponse indicielle (2ème ordre)




$s(t)$

$s_F(t)$

$s_L(t)$

$s(0^-) = 2$

$s'(0^-) < 0$

# Réponse indicielle (2$^{ème}$ ordre)

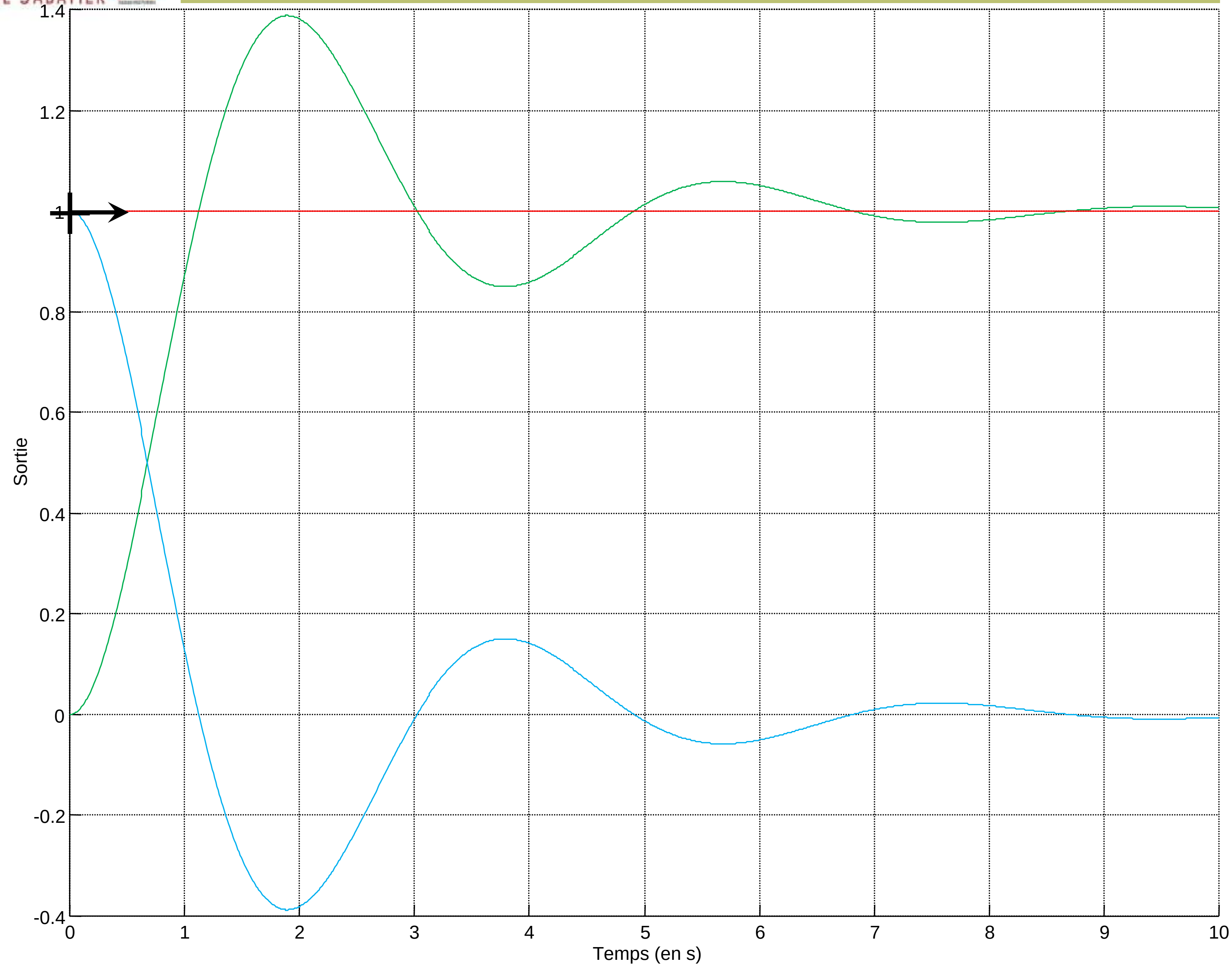
$\color{red}{s(t)}$

$\color{green}{s_F(t)}$

$\color{cyan}{s_L(t)}$

$s(0^-) = 1$

$s'(0^-) = 0$



# Réponse indicielle (2ème ordre)

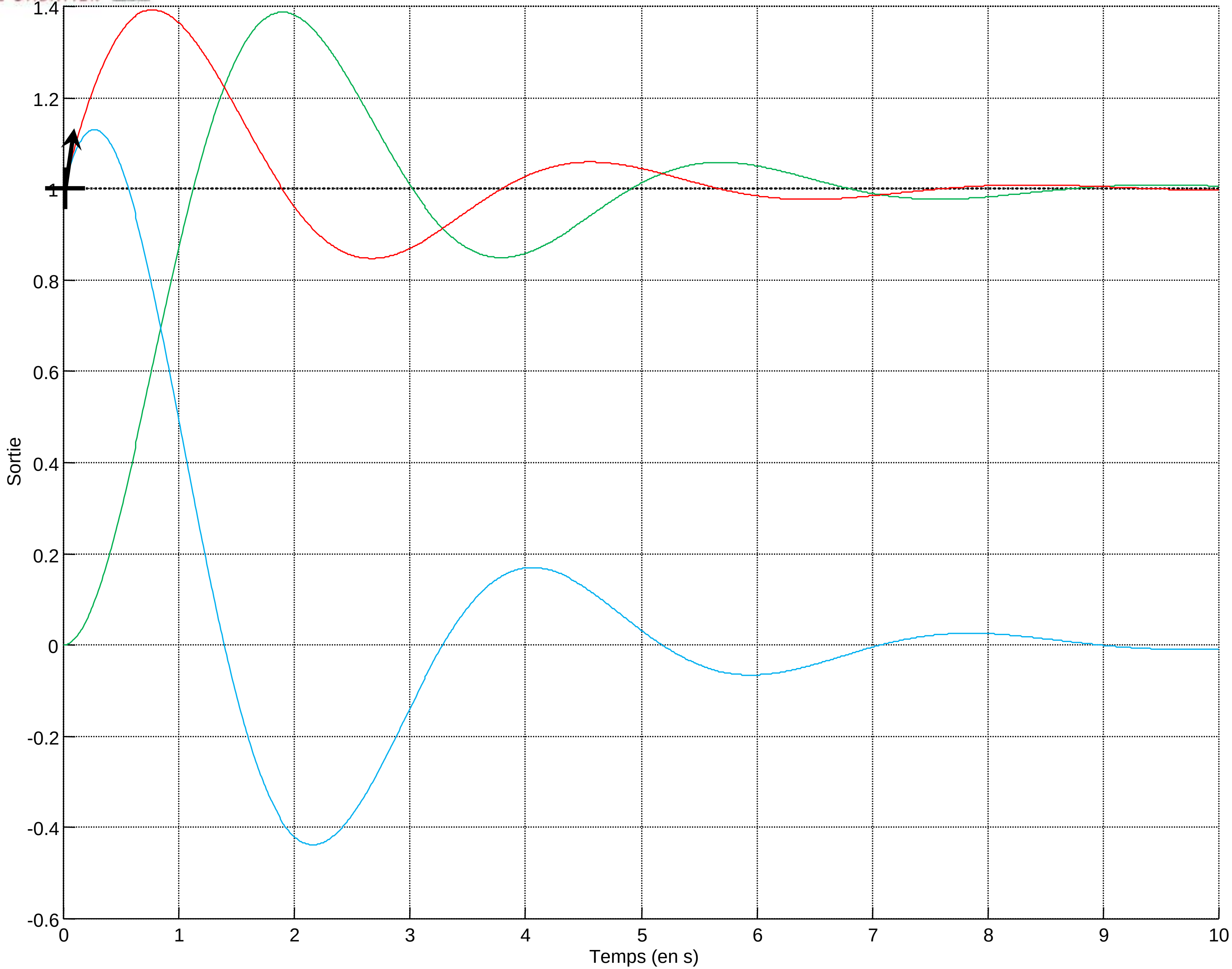
$s(t)$

$s_F(t)$

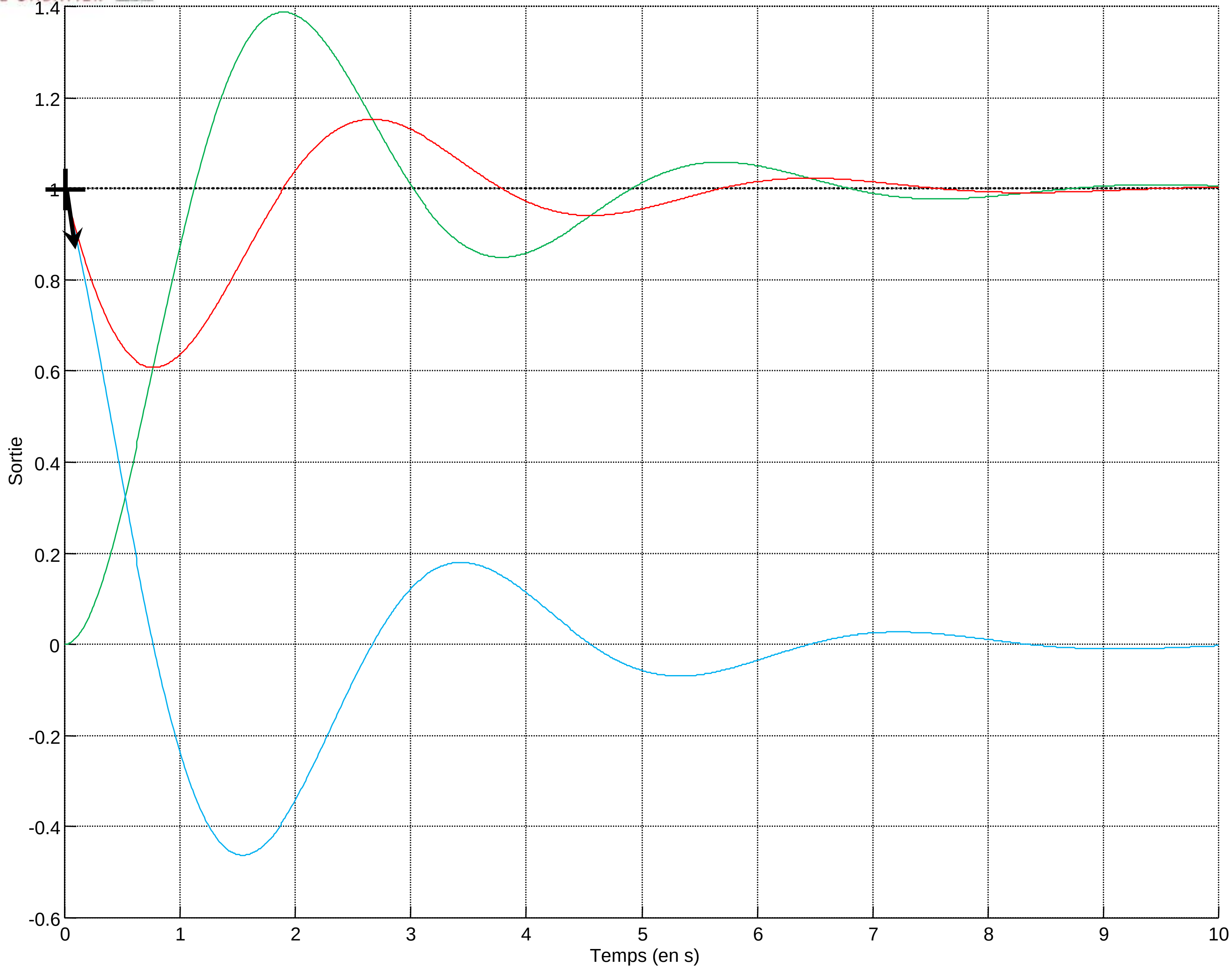
$s_L(t)$

$s(0^-) = 1$

$s'(0^-) > 0$



# Réponse indicielle (2$^{ème}$ ordre)




$s(t)$

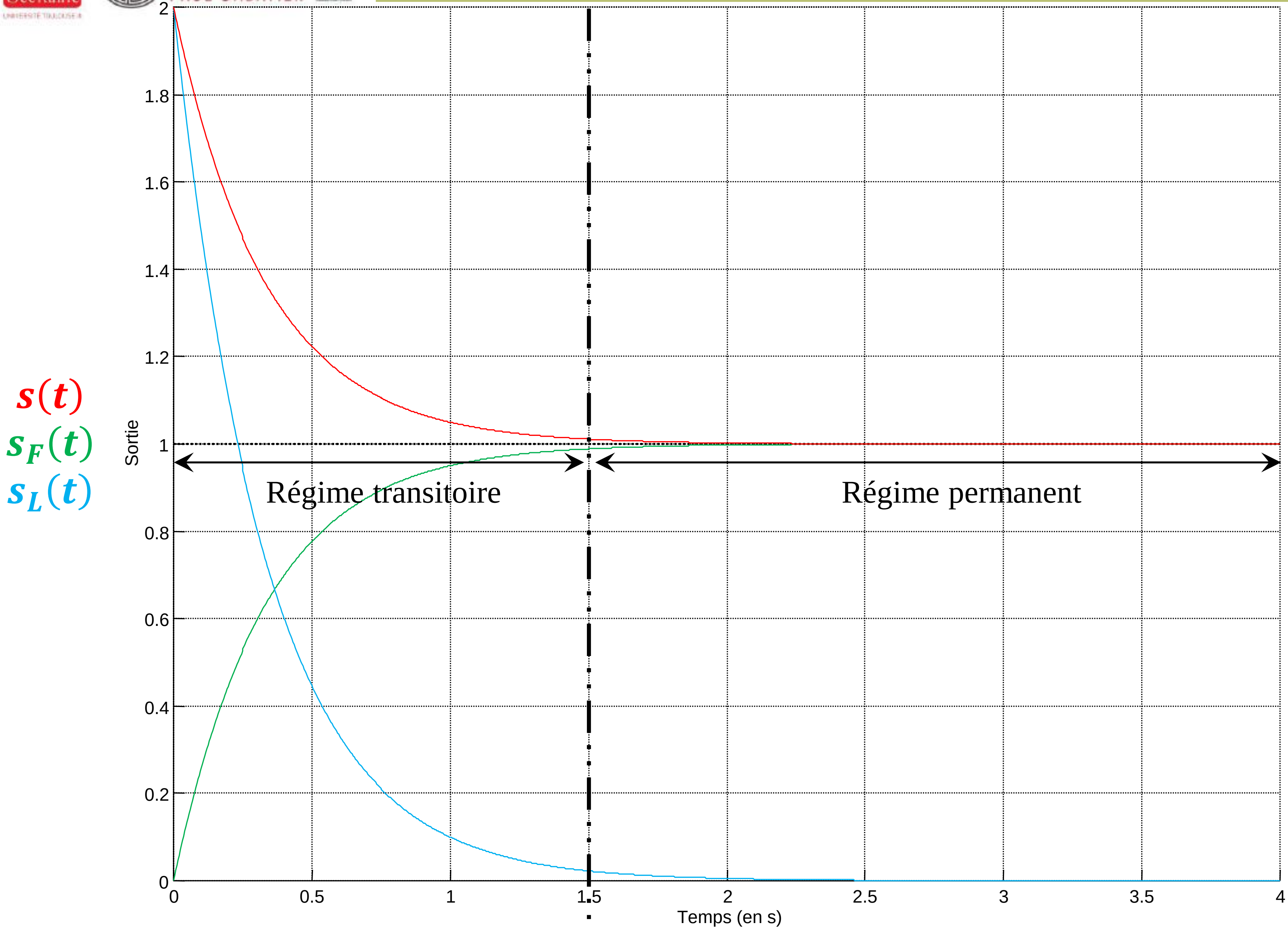
$s_F(t)$

$s_L(t)$

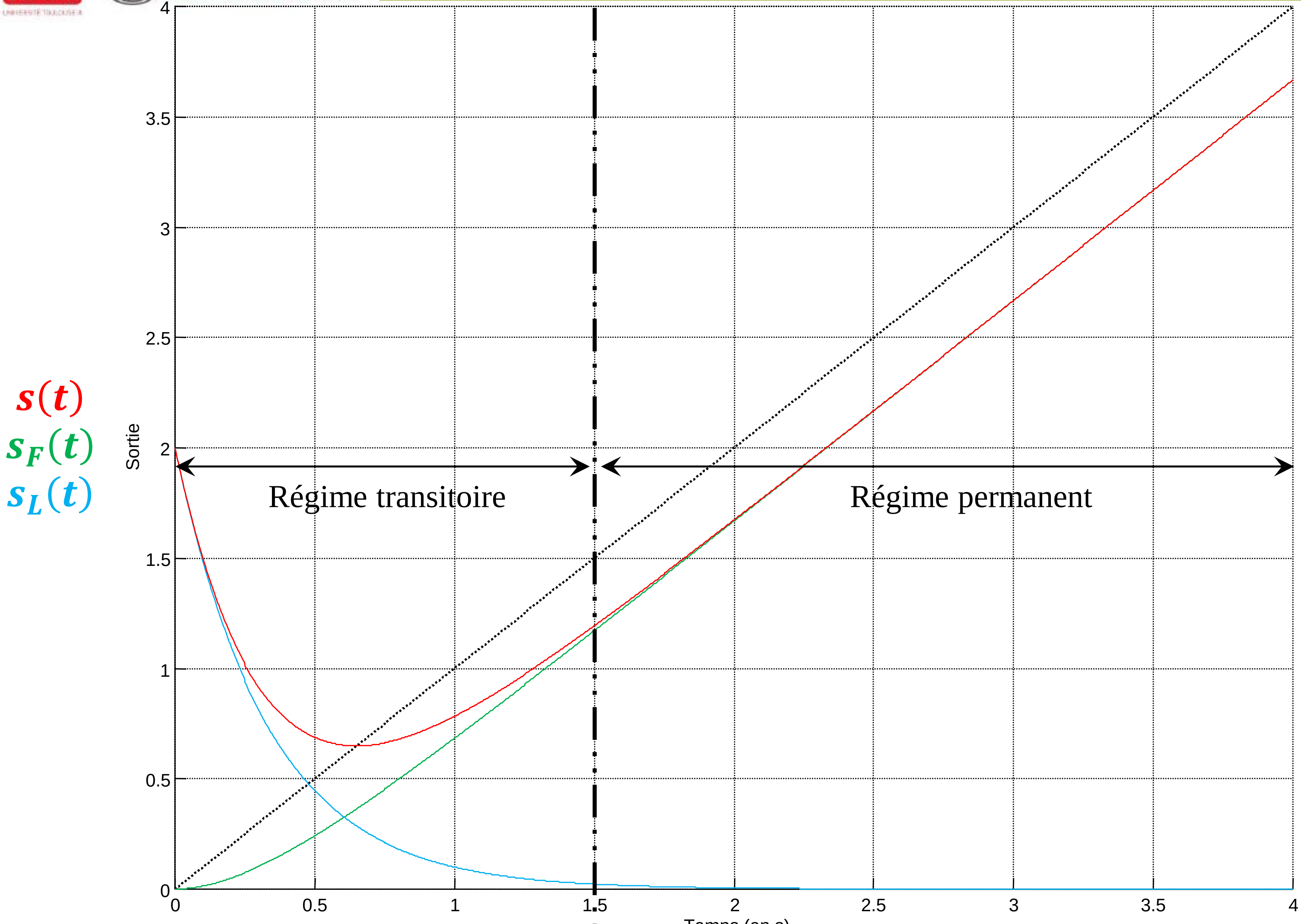
$s(0^-) = 1$

$s'(0^-) < 0$

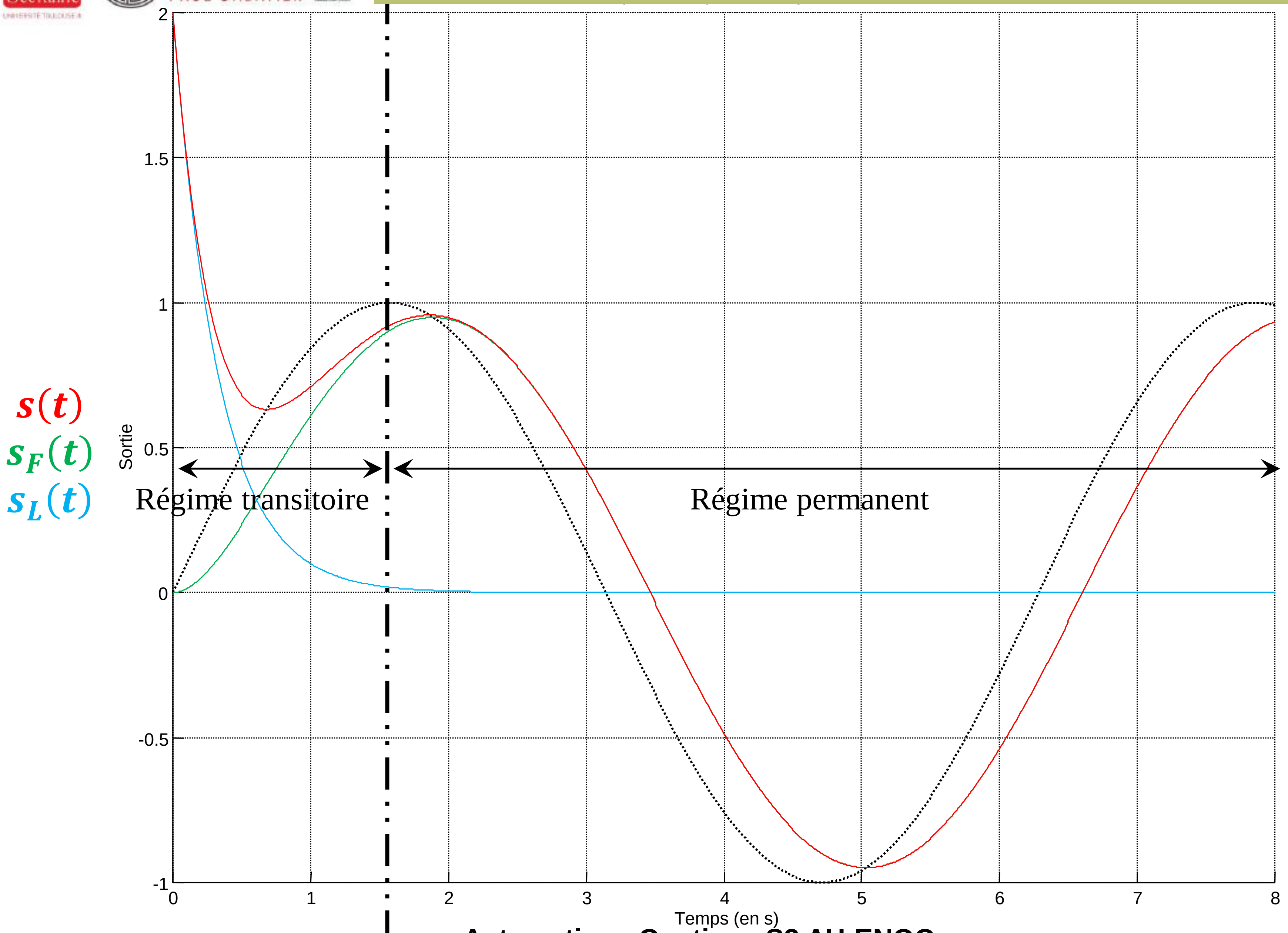
# Réponse indicielle ($1^{er}$ ordre)



# Réponse à un échelon de vitesse (1er ordre)

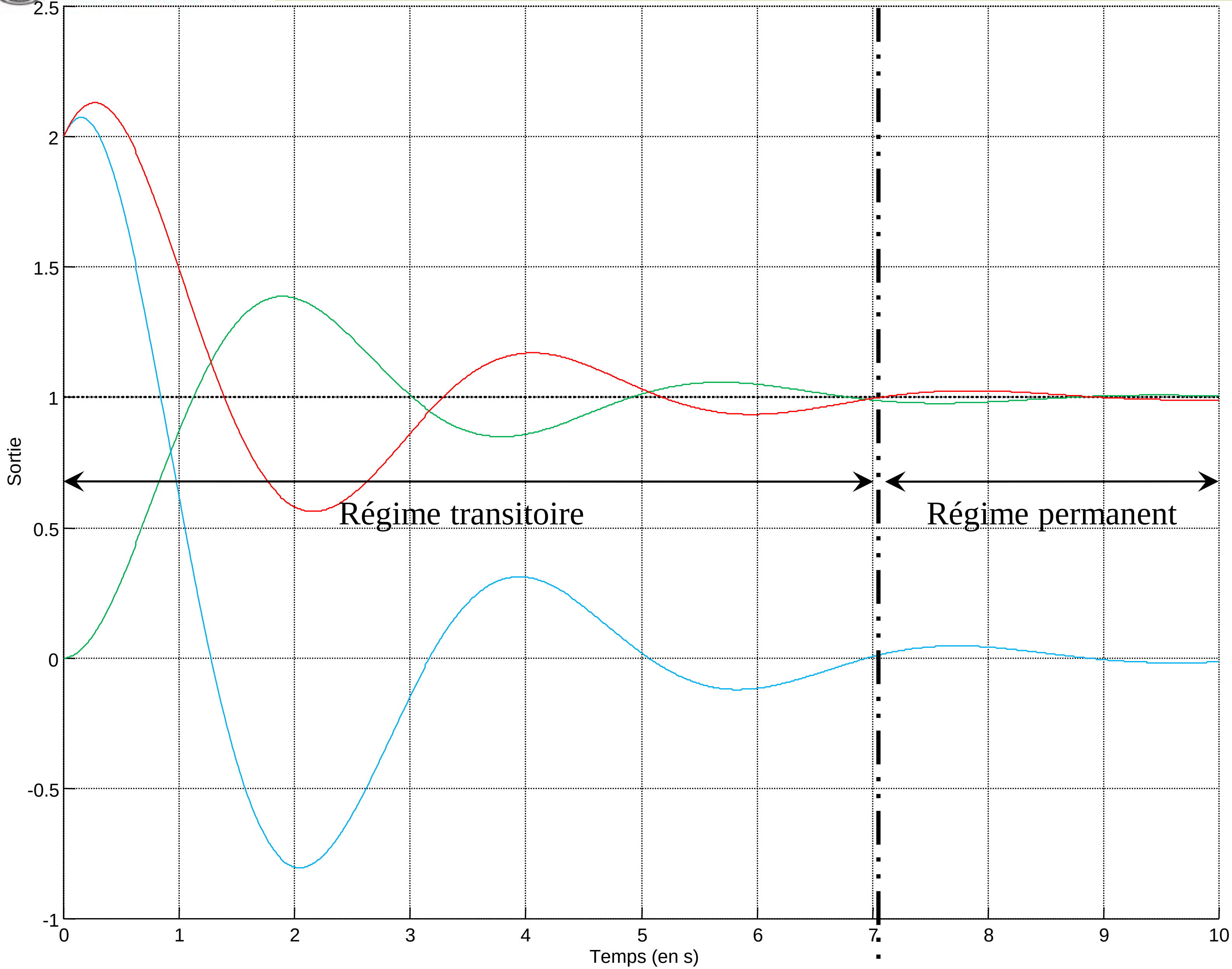


# Réponse à un échelon sinusoïdal ($1^{er}$ ordre)

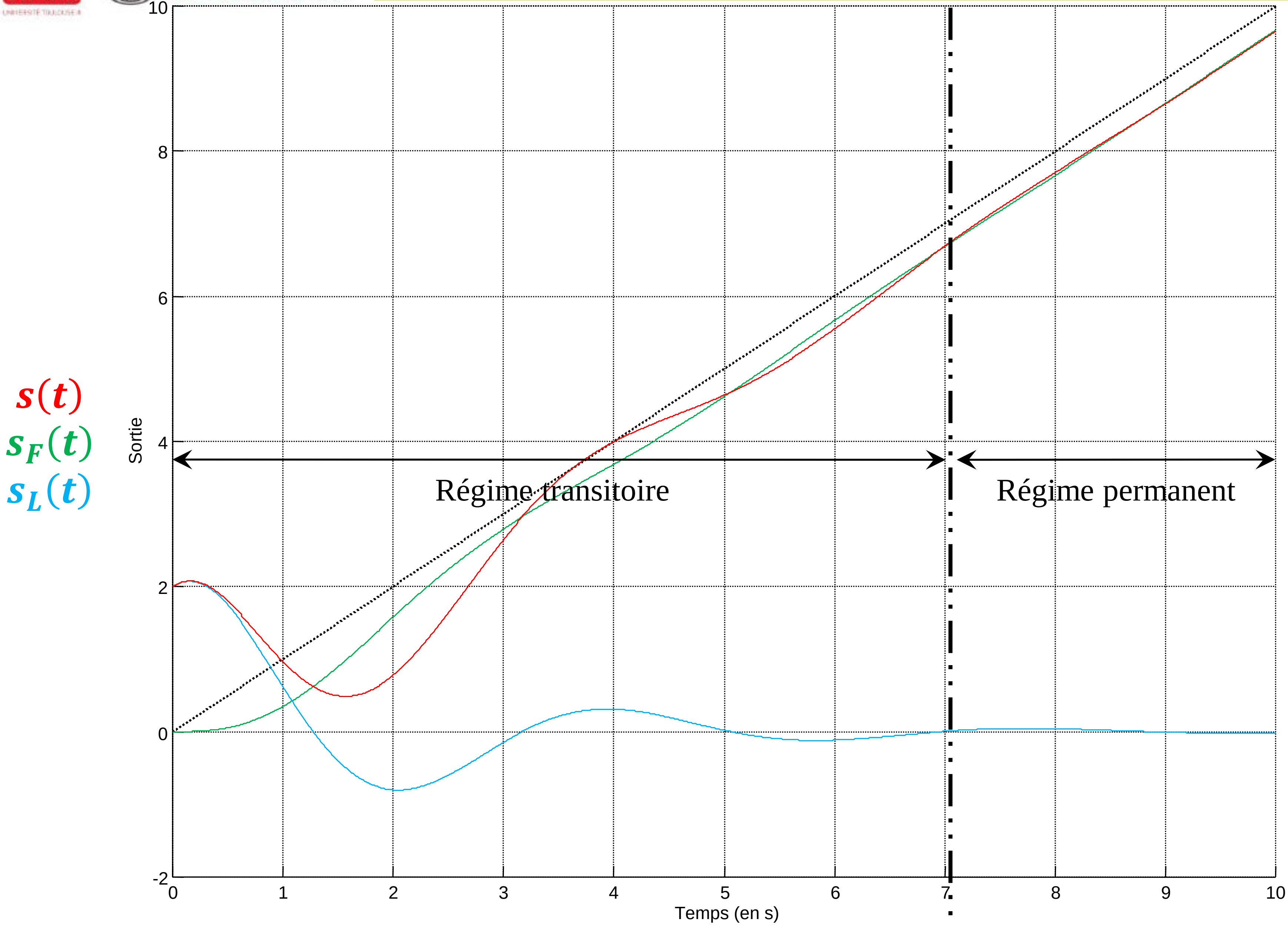


# Réponse indicielle ($2^{ème}$ ordre)

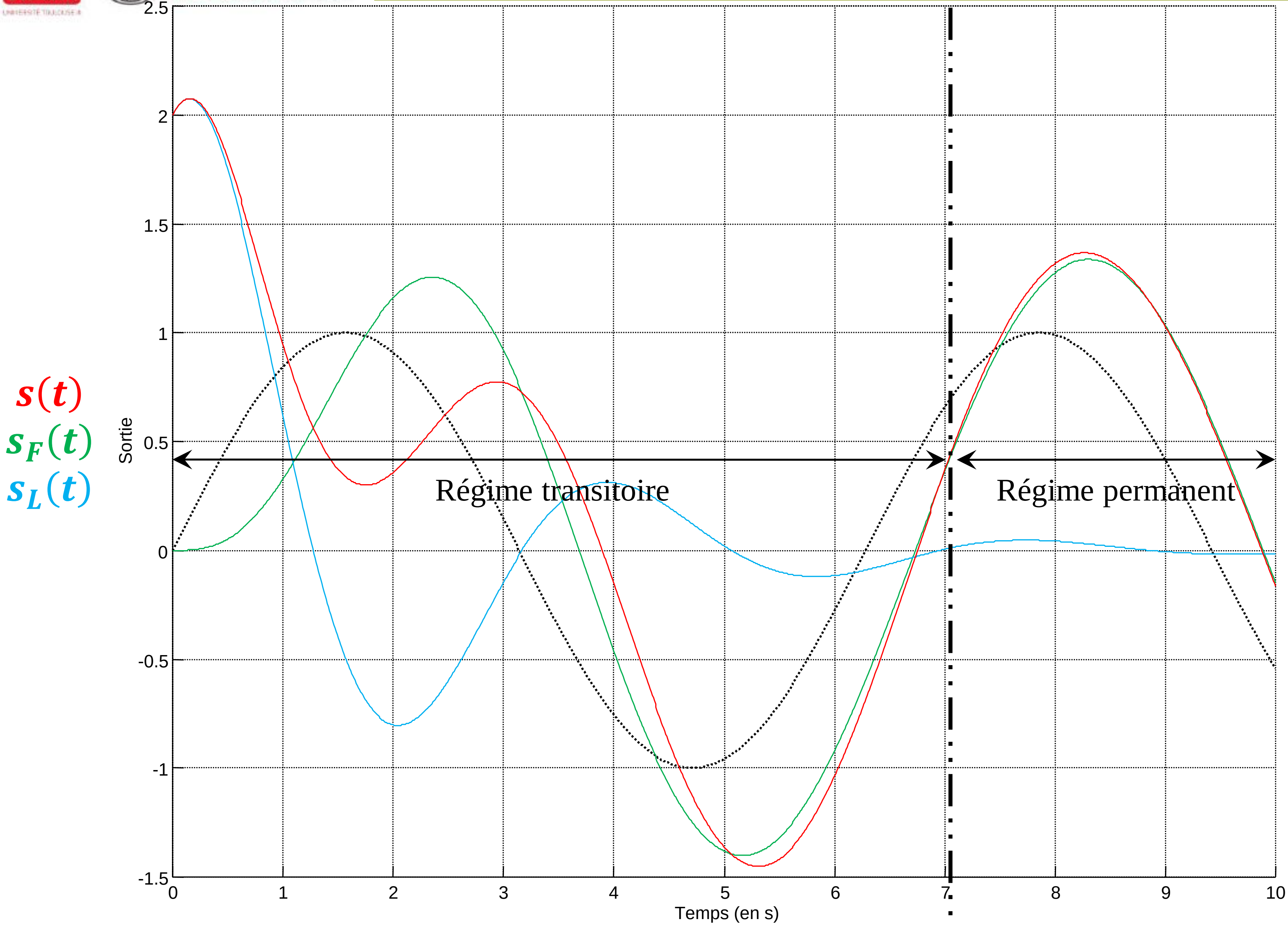
$s(t)$
$s_F(t)$
$s_L(t)$



# Réponse à un échelon de vitesse (2ème ordre)



# Réponse à un échelon sinusoïdal (2ème ordre)



# Fonction de transfert du système

$T(p)$ représente la **fonction de transfert** du système.

- ✓ C'est une fraction rationnelle $T(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$
- ✓ $N(p)$ est un polynôme de degré $m$
- ✓ $D(p)$ est un polynôme de degré $n$.

Pour que le système soit causal, il faut que $m \leq n$.

- ✓ $n$ : ordre de la fonction de transfert,
- ✓ $n - m$ : ordre relatif de la fonction de transfert,
- ✓ pôles de la fonction de transfert : racines de $D(p)$,
- ✓ zéros de la fonction de transfert : racines de $N(p)$.

$T_{CI}(p)$ est une fraction rationnelle qui a le même dénominateur $D(p)$ que $T(p)$.

**Remarque :** Pour calculer explicitement $s(t)$, $s_F(t)$ ou $s_L(t)$ il est nécessaire d'effectuer une décomposition en éléments simples.

# Exemple n°1

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

- ✓ $\boldsymbol{N(p) = 1}$ est un polynôme de degré $\boldsymbol{m = 0}$
- ✓ $\boldsymbol{D(p) = (p+1)(p+2)}$ est un polynôme de degré $\boldsymbol{n = 2}$,
- ✓ fonction de transfert d'ordre $\boldsymbol{n = 2}$,
- ✓ fonction de transfert d'ordre relatif $\boldsymbol{n - m = 2}$,
- ✓ pôles de la fonction de transfert : $\boldsymbol{p_1 = -1}$ et $\boldsymbol{p_2 = -2}$,
- ✓ zéros de la fonction de transfert : **aucun**.

# Exemple n°2

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \frac{p+3}{(p+2)^2}$$

- ✓ $\boldsymbol{N(p) = p + 3}$ est un polynôme de degré $\boldsymbol{m = 1}$
- ✓ $\boldsymbol{D(p) = (p + 2)^2}$ est un polynôme de degré $\boldsymbol{n = 2}$,
- ✓ fonction de transfert d'ordre $\boldsymbol{n = 2}$,
- ✓ fonction de transfert d'ordre relatif $\boldsymbol{n - m = 1}$,
- ✓ pôles de la fonction de transfert : $\boldsymbol{p_1 = -2}$ (pôle de multiplicité 2),
- ✓ zéros de la fonction de transfert : $\boldsymbol{z_1 = -3}$.

# Calcul de la réponse fréquentielle

On montre que si $\boldsymbol{e(t) = E_0 . sin(\omega . t)}$ alors $\boldsymbol{s(t) = S_0(\omega) . sin(\omega . t + \varphi(\omega))}$.

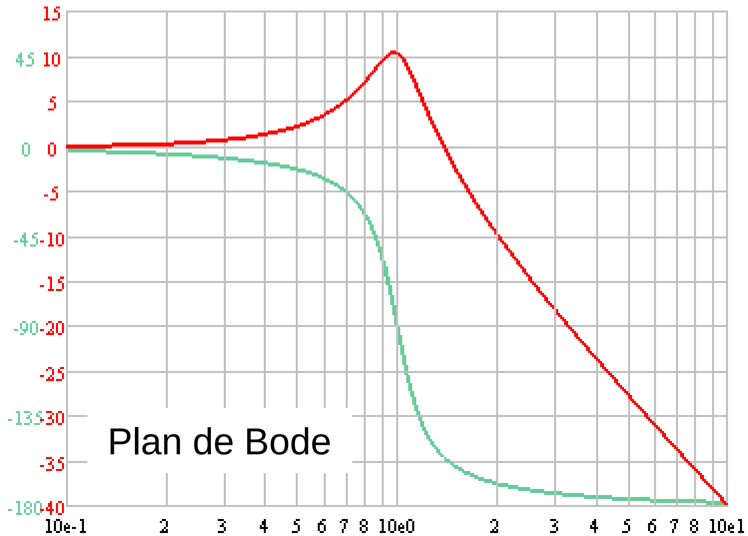
- ✓ Ceci est valable en régime permanent
- ✓ $\boldsymbol{S_0(\omega)}$ et $\boldsymbol{\varphi(\omega)}$ sont des expressions qui dépendent de la pulsation $\boldsymbol{\omega}$.

Par définition on notera :

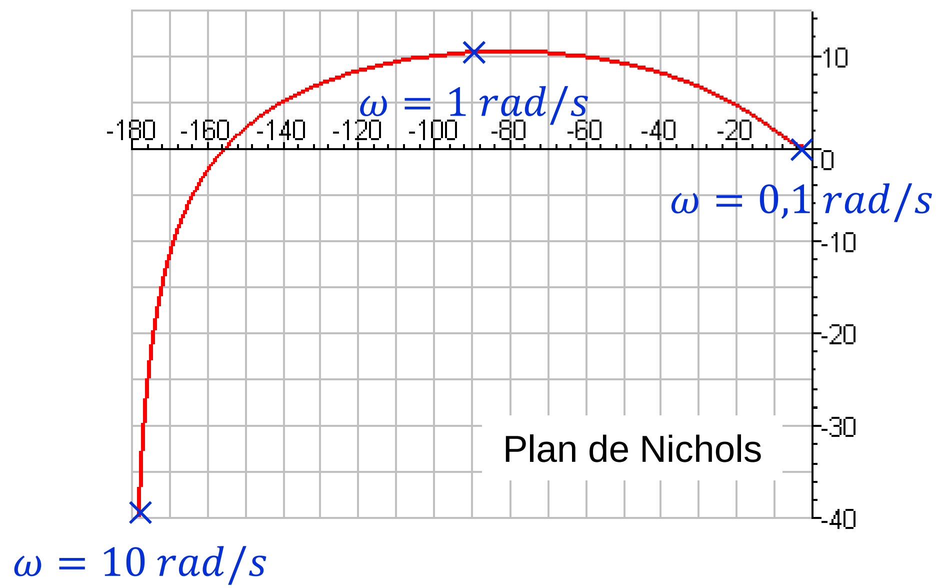
- ✓ $\boldsymbol{A(\omega)}$ le gain linéaire $\left(\boldsymbol{A(\omega) = \frac{S_0(\omega)}{E_0} = |T(j\omega)|}\right)$,
- ✓ $\boldsymbol{A_{dB}(\omega)}$ le gain logarithmique ($\boldsymbol{A_{dB}(\omega) = 20 . log(A(\omega))}$ ),
- ✓ $\boldsymbol{\varphi(\omega)}$ ou $\boldsymbol{\varphi^{\circ}(\omega)}$ correspond au déphasage du système ($\boldsymbol{\varphi(\omega) =} Arg\boldsymbol{(T(j\omega))}$ ).

**Remarque :** Cette réponse peut être représentée dans plusieurs plans.

- ✓ Lieu de transfert dans le plan de Bode (courbes asymptotiques/réelles),
- ✓ Lieu de transfert dans le plan de Nichols.




**Echelle semi-logarithmique**




**Echelle linéaire**