

Exercice 2 p 6

1) la courbe de $s(t)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
le signal $s(t)$ est donc pair

$$2) s(t) = \begin{cases} 2t+4 & \text{si } -2 \leq t \leq -1 \\ -2t & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -2t+4 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

3) $s(t)$ est pair $\Rightarrow \underline{b_n = 0}$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} s(t) dt = \frac{2}{2} \int_0^1 s(t) dt = \underline{1 = a_0}$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} s(t) \cos(2n\pi f_0 t) dt$$

$$= 2 \int_0^1 s(t) \cos(2n\pi \times \frac{1}{2} t) dt$$

$$= 2 \int_0^1 2t \cos(n\pi t) dt = 4 \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt$$

on fait une intégration par parties

$$u = t \quad u' = 1$$

$$v' = \cos(n\pi t) \quad v = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t)$$

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \left(\left[\frac{t}{n\pi} \sin(n\pi t) \right]_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi t) dt \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{n\pi} \underbrace{\sin(n\pi)}_0 - 0 - \frac{1}{n\pi} \left[-\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi t) \right]_0^1 \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{4}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = a_n}} \end{aligned}$$

Si n est pair, $n = 2p$, $a_{2p} = 0$

Si n est impair, $n = 2p+1$, $a_{2p+1} = \underline{\underline{\frac{-8}{(2p+1)^2 \pi^2}}}$

$$4) \Delta_F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(2n\pi f_0 t) + b_n \sin(2n\pi f_0 t)]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi t)$$

$$= 1 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-8}{(2p+1)^2 \pi^2} \cos((2p+1)\pi t)$$

5) Formulaire avec $A=2$ et $T_0=2$

$$6) P = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} \Delta^2(t) dt$$

$$= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \Delta^2(t) dt = \frac{2}{2} \int_0^1 (2t)^2 dt = 4 \int_0^1 t^2 dt$$

$$= 4 \times \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = 4/3$$

$$P = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = 1 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{8}{(2p+1)^2 \pi^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = 1 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{64}{(2p+1)^4 \pi^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{32}{(2p+1)^4 \pi^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{3 \times 32} = \frac{\pi^4}{96}$$