Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Une équation différentielle est une équation dans laquelle les inconnues sont des fonctions (ici, par exemple $s(t)$). Elle s'écrit sous forme d'une relation entre $s(t)$ et ses dérivées successives $s'(t)$, $s''(t)$…

Intégrer une équation différentielle signifie la **résoudre** (donc trouver $s(t)$).

Exemple : Soit à intégrer l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} s''(t) + 3s'(t) + 2s(t) = u(t) \\ s(0^-) = 1 \;\; et \;\; s'(0^-) = 0 \quad \text{(Conditions initiales)} \end{cases}$$

Dans cette équation différentielle, on cherche la fonction $s(t)$.

En utilisant la méthode avec la transformation de Laplace, on commence, tout d'abord, par déterminer $\boldsymbol{S}(p) = \boldsymbol{\mathcal{L}}(s(t))$.

Méthode de résolution en utilisant la transformation de Laplace :

a. On note $\boldsymbol{S}(p) = \boldsymbol{\mathcal{L}}(s(t))$
b. On exprime $\boldsymbol{\mathcal{L}}(s'(t))$ et $\boldsymbol{\mathcal{L}}(s''(t))$ en fonction de $\boldsymbol{S}(p)$
c. On détermine la transformée de Laplace du second membre
d. On applique la transformation de Laplace à toute l'équation différentielle
e. On utilise la linéarité de la transformation de Laplace
f. On isole $\boldsymbol{S}(p)$
g. On applique la transformation inverse pour trouver $s(t)$

a. Soit $\boldsymbol{S}(p) = \boldsymbol{\mathcal{L}}(s(t))$

b. $\boldsymbol{\mathcal{L}}\big(s'(t)\big) = p\boldsymbol{S}(p) - s(0^-) = p\boldsymbol{S}(p) - 1$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\big(s''(t)\big) = p^2\boldsymbol{S}(p) - ps(0^-) - s'(0^-) = p^2\boldsymbol{S}(p) - p$$

c. La transformée de Laplace du second membre est : $\boldsymbol{\mathcal{L}}\big(u(t)\big) = \frac{1}{p}$

d. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle, on obtient :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(s''(t) + 3s'(t) + 2s(t)) = \boldsymbol{\mathcal{L}}(u(t))$$

e. Par linéarité, on a :

$$\mathcal{L}(s''(t)) + 3\mathcal{L}(s'(t)) + 2\mathcal{L}(s(t)) = \mathcal{L}(u(t))$$

En remplaçant avec les résultats obtenus en a,b, et c, on obtient :

$$p^2\boldsymbol{S}(p) - p + 3(p\boldsymbol{S}(p) - 1) + 2\boldsymbol{S}(p) = \frac{1}{p}$$

En factorisant par $\boldsymbol{S}(p)$, on a alors :

$$(p^2 + 3p + 2)\boldsymbol{S}(p) - p - 3 = \frac{1}{p}$$

f. On isole $\boldsymbol{S}(p)$, ce qui donne :

$$(p^2 + 3p + 2)\boldsymbol{S}(p) = \frac{1}{p} + p + 3 = \frac{p^2 + 3p + 1}{p}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S}(p) = \frac{p^2 + 3p + 1}{p(p^2 + 3p + 2)}$$

g. Pour déterminer s(t), on détermine la transformée inverse de $\boldsymbol{S}(p)$.(Voir la séance dernière).

Pour cela, on commence par déterminer la nature des pôles de $\boldsymbol{S}(p)$

La fraction rationnelle $\boldsymbol{S}(p)$ admet trois pôles réels simples : 0,-1 et -2

Puisque $\boldsymbol{S}(p)$ admet des pôles réels, on la décompose en éléments simples.

On obtient alors :

$$\boldsymbol{S}(p) = \frac{p^2 + 3p + 1}{p(p^2 + 3p + 2)} = \frac{p^2 + 3p + 1}{p(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}$$

$$= \frac{1/2}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{-1/2}{p+2}$$

D'où $s(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)$

$$s(t) = \frac{1}{2}u(t) + e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

Finalement, la solution de l'équation différentielle est :

$$\boxed{s(t) = (\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t})u(t)}$$