

Exercices : calcul intégral

1

Exercice n°1 : Déterminer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 (2x + x^2) dx, \quad J = \int_1^3 \frac{1+x e^x}{x} dx, \quad K = \int_{-1}^1 e^{-t} dt, \quad L = \int_0^2 |2x-1| dx$$

Exercice n°2 : même question pour :

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \cos(3x) dx, \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x) dx, \quad P = \int_0^{\pi} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx$$
$$Q = \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx, \quad R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin^3(x) dx$$

Exercice n°3 : même question pour

$$A = \int_0^1 x e^{-x^2} dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx, \quad C = \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-2x+1} dx, \quad D = \int_1^2 \frac{2x-1}{(x^2-2x+1)^2} dx$$
$$E = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} \quad \text{et} \quad F = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

Exercice n°4 : Utiliser une ou deux IPP pour calculer :

$$J_1 = \int_1^e x^2 \ln(x) dx, \quad J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) dx, \quad J_3 = \int_1^2 \ln(x) dx,$$
$$J_4 = \int_0^{\pi} t^2 \sin(t) dt, \quad J_5 = \int_0^1 e^{-t} \cos(t) dt$$

Exercice n°5 : utiliser un changement de variables judicieux pour :

$$K_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \quad K_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}, \quad K_3 = \int_{-1}^0 \frac{x^5 dx}{(1+x^2)^3}, \quad K_4 = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Exercice n°6 : Déterminer les intégrales suivantes (fractions rationnelles) :

$$L_1 = \int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}, \quad L_2 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}, \quad L_3 = \int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)} dx$$
$$L_4 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2} \quad \text{et} \quad L_5 = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+2x+5}$$

Exercice n°7 Soit $W = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt$

2

- 1) Au moyen d'un changement de variables judicieux transformer W
- 2) Calculer W qui devient l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Exercice n°8

Soit $H_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$ et $H_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$

Il est difficile de calculer H_1 et H_2 séparément alors on utilise une astuce :

- 1) Calculer $H_1 + H_2$
- 2) Calculer $H_1 - H_2$
- 3) En déduire H_1 et H_2

Exercice n°9 (difficile) : les intégrales de Wallis

on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$

- 1) Calculer I_0, I_1
- 2) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}
- 3) En déduire I_{2p} et I_{2p+1} (n pair et n impair)