

I) Généralités

On appelle ED2 toute relation du type $R(x, y, y', y'') = 0$ (1) dans laquelle $x \in \mathbb{R}$, $y = y(x)$, $y'(x) = y'$, $y'' = y''(x)$ (fonctions numériques de la variable réelle x définies sur $I \subset \mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$). Si $\forall x \in I$, la fonction φ vérifie $R(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0$, on dit que φ est une solution particulière de (1) sur I .

Résoudre (ou intégrer) (1) sur $I \subset \mathbb{R}$, voire sur $\mathbb{R}$, c'est déterminer toutes les solutions particulières qui la vérifient. On cherchera à les exprimer toutes à travers la solution générale de (1) notée $y_{G(1)}(x)$. Son écriture comportera 2 constantes arbitraires λ_1 et λ_2 réelles et à chaque couple (λ_1, λ_2) correspondra une solution particulière de (1).

Résultat admis : pour les ED2 traitées à l'IVT, on admet qu'il existe une seule solution particulière y_f de (1) telle que $y_f(x_0) = y_0$ et $y_f'(x_0) = y_1$ ($x_0 \in I$, y_0, y_1 3 réels donnés au départ). Cette solution particulière favorable y_f vérifie 2 conditions initiales. Son graphe passe par le point $P_0(x_0, y_0)$ avec en ce point une tangente de pente y_1 .

II) ED2 linéaires (ED2L)

1) Définitions

On appelle ED2L toute ED2 du type $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ (2) dans laquelle $a(x), b(x), c(x), d(x)$ sont 4 fonctions numériques définies sur $I \subset \mathbb{R}$, voire sur $\mathbb{R}$ avec $a(x) \neq 0$. Il existe 4 cas possibles :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{ED2L ACCSSM}) \text{ avec } a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

$$ay'' + by' + cy = d(x) \quad (\text{ED2L ACCASM}) \text{ si } d(x) \neq 0 \text{ ---}$$

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (\text{ED2L ACVSSM})$$

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (\text{ED2L ACVASM}) \text{ si } d(x) \neq 0$$

ACC : à coefficients constants

ASM : avec second membre

ACV : à coefficients variables

SSM : sans second membre

2) Théorème admis

2/5

Comme pour une E.D.L., la solution générale de (2) notée $y(x)$ est la somme de 2 termes :

$$y(x) = y_{GESSM}(x) + y_{PEASM}(x)$$

* $y_{GESSM}(x)$ est la solution générale de l'ESSM associée à (2)

* $y_{PEASM}(x)$ est une solution particulière de l'EASM (c'est à dire (2))

3) Comment déterminer $y_{GESSM}(x)$?

a) si les coefficients sont constants

l'ESSM est de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$

On cherche les solutions (réelles ou complexes) de (EC) : $ax^2 + bx + c = 0$

(EC) est appelée équation caractéristique

* si (EC) admet 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2 ($\Delta > 0$)

alors $y_{GESSM}(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

* si (EC) admet une solution réelle double r_0 ($\Delta = 0$)

alors $y_{GESSM}(x) = \lambda_1 e^{r_0 x} + \lambda_2 x e^{r_0 x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

* si (EC) admet 2 solutions complexes conjuguées r_1 et r_2 ($\Delta < 0$)

on note $r_1 = \alpha + i\beta$ (α et β réels) et $r_2 = \bar{r}_1$

alors $y_{GESSM}(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \lambda_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

Remarque : dans ce dernier cas $y_{GESSM}(x) = e^{\alpha x} [\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)]$

Or, on connaît la formule de trigonométrie

$$a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) = A \cos(\omega x + \varphi) \text{ ou } A \sin(\omega x + \theta)$$

avec $A \in \mathbb{R}^+$, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ Ici $\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x) = \lambda \cos(\beta x + \varphi)$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ (ou $\theta \in \mathbb{R}$) (ou $\lambda \sin(\beta x + \theta)$)

Donc, pour les physiciens, il sera parfois plus utile

d'écrire $y_{GESSM}(x) = \lambda \cos(\beta x + \varphi) e^{\alpha x}$ ou

$y_{GESSM}(x) = \lambda \sin(\beta x + \theta) e^{\alpha x}$

les constantes arbitraires étant $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

b) si les coefficients sont variables

l'ESM est de la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ avec $a(x) \neq 0$ (3)

Il n'y a plus de formule possible. Si on a de la chance (intuition ou suggestion de l'énoncé) de trouver 2 solutions particulières linéairement indépendantes de (3), $y_1(x)$ et $y_2(x)$ alors on pourra écrire

$$y_{\text{GESSM}}(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

NB : on dit que 2 fonctions f et g sont linéairement indépendantes (au sens de l'algèbre linéaire qui sera abordée en S_4) s'il n'existe pas de réel k tel que $f(x) = k g(x)$ ou $g(x) = k f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{x+2}$ sont linéairement dépendantes
(car $e^{x+2} = e^x e^2$ donc $g(x) = e^2 f(x) = k f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

$\rightarrow f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ sont linéairement indépendantes car, par l'absurde, $f(0) = k g(0)$ entraînerait $\cos(0) = k \sin(0)$ soit $1 = 0$!

c) Exemples

* (4) : $y'' - 2y' + y = 0$ (4) est une ED2LACSSM

Son (EC) est $r^2 - 2r + 1 = 0$ soit $(r-1)^2 = 0$ donc une solution double

$r_0 = 1$ et $y_{\text{G(4)}}(x) = y_{\text{GESSM}}(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 x e^x$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

* (5) : $y'' - 5y' + 6y = 0$ (5) est une ED2LACSSM

Son (EC) est $r^2 - 5r + 6 = 0$ soit $(r-2)(r-3) = 0$ donc 2 solutions

réelles distincts $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$ alors $y_{\text{G(5)}}(x) = y_{\text{GESSM}}(x) = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{3x}$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

* (6) : $y'' - 2y' + 5y = 0$ (6) est une ED2LACSSM

Son (EC) est $r^2 - 2r + 5 = 0$ avec $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$ donc 2

solutions complexes conjuguées $r_1 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i = \alpha + i\beta$ et $r_2 = 1-2i$

alors $y_{\text{G(6)}}(x) = y_{\text{GESSM}}(x) = \lambda_1 e^x \cos(2x) + \lambda_2 e^x \sin(2x)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

4) Comment déterminer $y_p(x)$?

a) cas où l'EAST est de la forme $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\tau x}$

avec $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $P(x)$ un polynôme de degré n et $\tau \in \mathbb{R}$

on cherche cette solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = Q(x)e^{\tau x} \text{ où } Q(x) \text{ est un autre polynôme}$$

→ si τ est une racine simple de (EC) alors $d^0(Q) = n+1$

→ si τ est une racine double de (EC) alors $d^0(Q) = n+2$

→ si τ n'est pas une racine de (EC) alors $d^0(Q) = n$

exemple : on veut résoudre (7) : $y'' + y' = 3e^{-x}$ (7) est une EAST

* solution générale de l'ESSM : $y'' + y' = 0$

cette ESSM est ACC donc elle admet une (EC) : $r^2 + r = 0$ ou $r(r+1) = 0$

il y a donc 2 racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = -1$

donc $\left| \begin{array}{l} y \\ \text{G.E.S.S.M.} \end{array} \right. (x) = \lambda_1 e^{0x} + \lambda_2 e^{-x} = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

* solution particulière de l'EAST : $y'' + y' = 3e^{-x}$

(7) est ACC et son second membre est $P(x)e^{\tau x}$ avec $\begin{cases} P(x) = 3 \\ \tau = -1 \end{cases}$

-1 est une racine de (EC) donc on cherche $y_p(x) = e^{-x}Q(x)$

avec $d^0(Q) = d^0(P) + 1 = 0 + 1 = 1$ donc $Q(x) = ax + b$

ou encore $y_p(x) = (ax + b)e^{-x} \Rightarrow y_p'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$

$\Rightarrow y_p''(x) = -ae^{-x} - (-ax + a - b)e^{-x} = (ax - 2a + b)e^{-x}$

on injecte ces expressions dans (7) pour trouver a et b :

$(ax - 2a + b)e^{-x} + (-ax + a - b)e^{-x} = 3e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

ou $(ax - 2a + b - ax + a - b)e^{-x} = 3e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

ou $-a = 3$ et b quelconque (on prendra $b = 0$) et $a = -3$

d'où $\left| \begin{array}{l} y \\ \text{P.E.A.S.T.} \end{array} \right. (x) = -3xe^{-x}$

* Synthèse pour l'équation (7) :

la solution générale de (7) qui est linéaire est

$\left| \begin{array}{l} y \\ \text{G(7)} \end{array} \right. (x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-x} - 3xe^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

Par exemple : on veut résoudre (8) : $y'' - 5y' + 6y = \cos(x) - 2\sin(x)$

* solution générale de l'ESM : $y'' - 5y' + 6y = 0$

* solution particulière de l'E.A.M: $y'' - 5y' + 6y = \cos(x) - 2\sin(x)$

$\Rightarrow y''_{\text{dp}}(x) = -\alpha \cos(x) - \beta \sin(x)$ et on injecte ces expressions dans (8) :

$$d' \text{ sur } \begin{cases} 5\alpha - 5\beta = 1 \\ 5\alpha + 5\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\alpha = -1 \\ 5\beta = -2 - 5\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{10} \\ 5\beta = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

д) а) $y(x) = -\frac{1}{10} \cos(x) - \frac{3}{10} \sin(x)$

Comme (8) est linéaire, la solution générale de (8) est

c) Il existe une méthode (cas général) dite variation des constantes λ_1 et λ_2 (comme pour une E.D.L) mais hors programme IUT

Si l'ED2LACVASM est de la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d_1(x) + d_2(x)$
avec $a(x) \neq 0$, $d_1(x) \neq 0$ et $d_2(x) \neq 0$

$y_p(x)$ solution particulière de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d_1(x)$

¹²
Remarque: on peut généraliser ce principe à $d(x) = d_1(x) + d_2(x) + \dots + d_n(x)$

$$\text{due } y(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \dots + y_{p_n}(x)$$