

I) Généralités

On appelle équation différentielle du 1^{er} ordre (notée ED1) toute relation $R(x, y', y) = 0$ (1) dans laquelle $x \in \mathbb{R}$, $y = y(x)$ et $y' = y'(x)$ (fonctions numériques de la variable réelle x définies sur $I \subset \mathbb{R}$, voire sur $\mathbb{R}$)

Si $\forall x \in I$, la fonction φ vérifie $R(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$, on dit que φ est une solution particulière de (1).

Résoudre (ou intégrer) (1) sur $I \subset \mathbb{R}$, voire sur $\mathbb{R}$, c'est déterminer toutes les solutions particulières qui la vérifient. On les exprimera sous une forme qui les englobe toutes, appelée solution générale de (1) notée $y_{G(1)}(x)$. L'écriture de $y_{G(1)}(x)$ comportera une constante réelle arbitraire λ . A chaque valeur de λ correspondra une solution particulière de (1).

Résultat admis : pour les ED1 pas trop compliquées menées à l'IVT, on admettra qu'il existe une seule solution particulière y_F de (1) telle que $y_F(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 2 réels donnés au départ). On parle alors de condition initiale imposée car le plus souvent $x_0 = 0$, ce qui correspond au démarrage dans le temps du phénomène physique que (1) permet de modéliser. On note y_F cette solution particulière favorable et son graphe passe par le point $M_0(x_0, y_0)$

II) ED1 à variables séparables

1) Principe

Si on peut transformer $R(x, y, y') = 0$ en $f(y) dy = g(x) dx$ après avoir remplacé y' par $\frac{dy}{dx}$, on dit que (1) est à variables séparables (x et y dans ce cas) (même si y n'est pas vraiment une variable au même titre que x ...).

On effectuera ensuite $\int f(y) dy = \int g(x) dx$ soit $F(y) + c_1 = G(x) + c_2$

Si F est une primitive de f par rapport à y et G de g par rapport à x

On obtiendra ensuite $F(y) = G(x) + k$ ($k = k_2 - k_1$)

2/5

et avec un peu de chance ... on essaiera d'exprimer y en fonction de x .

2) Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'ED1 (2): $2y' + xy^2 = 0$

On pose $y' = \frac{dy}{dx}$ et on obtient $2 \frac{dy}{dx} = -xy^2$ ou $\frac{dy}{y^2} = -\frac{x}{2} dx$

on voit que (2) est à variables séparables donc $\int \frac{dy}{y^2} = \int -\frac{x}{2} dx$

On envoie $-\frac{1}{y} + k_1 = -\frac{x^2}{4} + k_2$, $\forall k_1 \in \mathbb{R}, \forall k_2 \in \mathbb{R}$

soit $-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{4} + k$ ($k = k_2 - k_1$) ou encore $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{4} - k = \frac{x^2 - 4k}{4}$

En posant $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient $y(x) = \frac{4}{x^2 + \lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

On peut juste affirmer que si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on aura des solutions particulières de (2) définies sur $\mathbb{R}$

par exemple, $y_1(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ ou $y_{10}(x) = \frac{4}{x^2 + 10}$...

III) ED1 linéaires (notes ED1 L)

1) Définitions

On appelle ED1 L toute ED1 du type $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ dans laquelle $a(x), b(x), c(x)$ sont 3 fonctions numériques définies sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$, voire sur $\mathbb{R}$. ($a(x) \neq 0$)

(3) peut être obtenue avec $c(x) = 0$ ou $c(x) \neq 0$

mais aussi avec $a(x) = a$ (constante réelle) et $b(x) = b$ (constante réelle) $c(x)$ est le second membre, $a(x)$ et $b(x)$ sont les coefficients de (3)

D'où les dénominations suivantes :

$ay' + by = 0$ (ED1 L ACC SSM) avec a et b constantes réelles

$ay' + by = c(x)$ (ED1 L ACC ASM) si $c(x) \neq 0$ et

$a(x)y' + b(x)y = 0$ (ED1 L ACV SSM)

$a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (ED1 L ACV ASM) si $c(x) \neq 0$

ACC : à coefficients constants

ACV : à coefficients variables

ASM : avec second membre (non nul)

SSM : sans second membre

2) théorème admis

3/5

la solution générale de (3) est la somme de 2 termes et s'écrit

$$y_{G(3)}(x) = y_{GESSM}(x) + y_{PEASSM}(x)$$

* $y_{GESSM}(x)$ est la solution générale de l'équation sans second membre associée à (3): $a(x)y' + b(x)y = 0$

* $y_{PEASSM}(x)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre (c'est à dire (3)) et il suffit d'en trouver une

3) comment déterminer $y_{GESSM}(x)$?

a) si les coefficients sont constants

l'ESSM est alors de la forme $ay' + by = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

On applique la formule ad hoc suivante qui donne

la solution générale de l'ESSM: $y_{GESSM}(x) = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}, \lambda \in \mathbb{R}$

Par exemple: la solution générale de (4): $y' + 3y = 0$

qui est une EDILACSSM est $y_{G(4)}(x) = \lambda e^{-3x}, \lambda \in \mathbb{R}$

b) si les coefficients sont variables

l'ESSM est alors de la forme $a(x)y' + b(x)y = 0$ et on pose $y' = \frac{dy}{dx}$

ce qui permet d'obtenir $a(x) \frac{dy}{dx} = -b(x)y$ ou $\frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)} dx$

cette ESSM est donc à variables séparables (voir II)

Par exemple: on veut résoudre (5): $xy' - y = 0$ (5) est une EDILACSSM

on pose $y' = \frac{dy}{dx}$ d'où $\dots \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ ou $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

donc $\ln|y| + k_1 = \ln|x| + k_2 \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + k \Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + k}$

$\Rightarrow |y| = e^{\ln|x|} \times e^k \Rightarrow \pm y = |x| \cdot \lambda \Rightarrow \pm y = (\pm x)\lambda \Rightarrow y = (\pm \lambda)x$

Et finalement

$$y_{GESSM}(x) = y_{G(5)}(x) = \mu x, \mu \in \mathbb{R}$$

(résultat qui aurait pu être trouvé intuitivement d'entrée)

4) Comment déterminer $y_{PEASM}(x)$?

4/5

a) Par intuition avec éventuellement des essais successifs

lorsque l'EDL proposé a ses coefficients constants et un second membre pas trop compliqué, on peut souvent trouver une solution particulière intuitivement en observant attentivement le second membre ...

Par exemple : cherchons une solution particulière de l'EDL

$$(6): y' + y = 3 \cos(x) \text{ dans } \mathbb{R}$$

Si on essaie $y_p(x) = \alpha \cos(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), on voit que cela ne convient pas mais essayons $y_p(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ (α, β réels)

alors $y_p'(x) = -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ et on injecte ces expressions dans (6) pour identifier α et β :

$$\text{Soit } [-\alpha \sin(x) + \beta \cos(x)] + [\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)] = 3 \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ou } (\alpha + \beta) \cos(x) + (-\alpha + \beta) \sin(x) = 3 \cos(x) + 0 \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ce qui conduit à } \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = 3 \\ \alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \boxed{y_{PEASM}(x) = \frac{3}{2} \cos(x) + \frac{3}{2} \sin(x)}$$

Et comme la solution générale de l'ESS associée à (6) $y' + y = 0$ est $y_{GESS}(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ici $a = 1$ et $b = 1$), on obtient finalement

$$\text{la solution générale de (6) soit } \boxed{y_{G(6)}(x) = \lambda e^{-x} + \frac{3}{2} \cos(x) + \frac{3}{2} \sin(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\text{Car } y_{G(6)}(x) = y_{GESS}(x) + y_{PEASM}(x)$$

b) Méthode de variation de la constante

Dans le cas où l'intuition ne donne rien et s'il n'y a pas une suggestion de l'énoncé, on peut toujours appliquer la méthode suivante : il s'agit donc de trouver une solution particulière de $ay' + by = c(x)$ ou $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Dans les 2 cas

la solution générale de l'ESS associée est $y_{GESS}(x) = \lambda y_1(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

où $y_1(x)$ est une solution de $ay' + by = 0$ ou $a(x)y' + b(x)y = 0$

(Dans le cas où les coefficients sont constants $y_1(x) = e^{-\frac{b}{a}x}$)

On cherche alors $y_p(x)$ sous la forme $y_p(x) = \lambda(x) y_1(x)$ 5/5
(on fait varier la constante λ qui devient $\lambda(x)$)

$$y_p'(x) = \lambda'(x) y_1(x) + \lambda(x) y_1'(x)$$

On injecte ces expressions dans l'ED1L $a(x) y' + b(x) y = c(x)$

et on obtient $a(x) [\lambda'(x) y_1(x) + \lambda(x) y_1'(x)] + b(x) [\lambda(x) y_1(x)] = c(x)$, $\forall x$

$$\text{soit } a(x) y_1(x) \lambda'(x) + \lambda(x) [a(x) y_1'(x) + b(x) y_1(x)] = c(x), \forall x$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= 0 \text{ car } y_1 \text{ est une solution de l'ED1L}}$

Il reste donc $\lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x) y_1(x)}$ et avec un peu de chance (!!)

on trouvera $\lambda(x)$ puis $y_p(x) = \lambda(x) y_1(x) \dots$

Méthode un peu lourde et pas gagnante à 100%
(voir l'exercice traité avec cette méthode)