

I) Introduction

Le vocable "intégrale" possède, en mathématiques, de nombreuses significations : Dans ce cours nous allons traiter :

* $\int_a^b f(x) dx$ si f est bornée sur $[a, b]$ appelé "intégrale définie"

* $\int_I f(x) dx = F(x) + k$ avec $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$ et $k \in \mathbb{R}$ appelée
I "intégrale indéfinie" et représentant toutes les primitives de f sur $I \subset \mathbb{R}$

Mais il y a beaucoup d'autres intégrals :

* $\int_a^x f(t) dt = h(x)$ ou $\int_x^b f(t) dt = g(x)$ appelées "intégrals fonction d'une borne"

* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ appelées "intégrals généralisées"
pour la borne $+\infty$, la borne $-\infty$, ou les bornes $-\infty$ et $+\infty$

* $\int_a^b f(x) dx$ avec $f(x)$ non bornée en a , en b ou en $c \in]a, b[$ appelée
intégrale généralisée pour a , b ou c

exemple : $\int_0^2 \frac{dx}{x}$ est une intégrale généralisée alors que

$\int_3^5 \frac{dx}{x}$ est une intégrale définie classique.

Il y a encore les intégrals curvilignes, les intégrals de Lebesgue etc...

II) Intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$

1) Définition admise

Si f est une fonction bornée et continue sur $[a, b]$ dont une primitive est F sur $[a, b]$, on définit :

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)} \quad \text{avec } F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

2) Propriétés

2/

a) Interprétation graphique

on démontre avec les aires des petits rectangles des sommes de Darboux que $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire algébrique de la portion du plan limitée par l'arc $\overline{AB}$ (ou C_f), l'axe (Ox) et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$, avec $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.
Les conventions de signe sont positives (aire au-dessus de (Ox)) et négatives (aire au-dessous de (Ox)) avec $\int_a^a f(x) dx = 0$.

b) Relation de Chasles

$\forall c \in]a, b[$, on admet que $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
et $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

c) Linéarité de l'intégrale

Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et $\int_a^b [\lambda f(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

d) Signe de l'intégrale

* Si f vérifie sur $[a, b]$ la condition $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
si, de plus, f est continue et non identiquement nulle sur $[a, b]$ alors $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$

* Si f et g vérifient sur $[a, b]$ $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

e) Intégrale et valeur absolue

on admet que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

f) Valeur moyenne d'une fonction sur $[a, b]$

* Définition si f est intégrable sur $[a, b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

* Exemple Poutier que si f est affine sur $[a, b]$ alors $\mu = \frac{f(a) + f(b)}{2}$
(on pourra écrire $f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a) = \alpha x + \beta$)



fonction f	primitives F
$a(x) = 0$ $b(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{Q} - \{-1\})$ $\hookrightarrow b_1(x) = 1$ $\hookrightarrow b_2(x) = x^3$ $\hookrightarrow b_3(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\hookrightarrow b_4(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$A(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$ $B(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$ $\hookrightarrow B_1(x) = x + k$ $\hookrightarrow B_2(x) = \frac{1}{4} x^4 + k$ $\hookrightarrow B_3(x) = -x^{-1} + k$ $\quad = -\frac{1}{x} + k$ $\hookrightarrow B_4(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + k$
$c(x) = \frac{1}{x}$	$C(x) = \ln x + k$
$d(x) = e^x$ $\hookrightarrow d_1(x) = e^{ax} \quad (a \neq 0)$	$D(x) = e^x + k$ $\hookrightarrow D_1(x) = \frac{1}{a} e^{ax} + k$
$e(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$E(x) = \text{Arctan}(x) + k$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$F(x) = \tan(x) + k$
$g(x) = \cos(x)$ $\hookrightarrow g_1(x) = \cos(\omega x + \varphi)$	$G(x) = \sin(x) + k$ $\hookrightarrow G_1(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi) + k$
$h(x) = \sin(x)$ $\hookrightarrow h_1(x) = \sin(\omega x + \varphi)$	$H(x) = -\cos(x) + k$ $\hookrightarrow H_1(x) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi) + k$

IV) Techniques générales

1) linéarité de l'intégrale

a) Rappel

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

b) Exemple Calculons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt$

$$I = \frac{1}{2} [t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{4} [\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} (0 - 0)$$

donc

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

2) Intégration par parties (IPP)

4/

a) Formule : u et v sont 2 fonctions dérivables sur $[a, b]$

on sait que $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\text{donc } u'(x)v(x) = [u(x)v(x)]' - u(x)v'(x)$$

$$\text{d'où } \int_a^b u'(x)v(x) dx = \int_a^b [u(x)v(x)]' dx - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

$$\text{avec } v'(x) = \frac{dv}{dx} \text{ et } u'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$\text{alors } \boxed{\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du}$$

b) Exemple : calculer $I = \int_0^1 \text{Arctan}(x) dx$ avec une IPP

$$\text{on pose } u = \text{Arctan}(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = dx \Leftrightarrow v = x$$

$$I = \int_0^1 \text{Arctan}(x) dx = \int_0^1 u dv = [uv]_0^1 - \int_0^1 v du = [x \text{Arctan}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$I = \left(1 \cdot \text{Arctan}(1) - 0 \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = 1 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln|1+x^2|]_0^1$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln|2| - \ln|1|) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln(2) - 0) \text{ donc } \boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)}$$

3) changements de variables

a) changement explicite

* Principe : on veut transformer $I = \int_a^b f(x) dx$ avec $\boxed{u = \varphi(x)}$

où φ est bijective sur $[a, b]$ et $du = \varphi'(x) dx$ donc $dx = \frac{du}{\varphi'(x)}$

$$I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \frac{du}{\varphi'(x)} \text{ et on s'efforce d'éliminer les } x \text{ du calcul}$$

* Exemple : $L = \int_2^e \frac{dx}{x \ln^3(x)}$

on pose $\boxed{u = \ln(x)}$, la fonction $\ln(x)$ est bijective sur $[2, e]$ et $du = \frac{1}{x} dx$

$$\text{donc } \boxed{dx = x du} \text{ alors } L = \int_{\ln(2)}^1 \frac{x du}{x u^3} = \int_{\ln(2)}^1 \frac{du}{u^3} = \int_{\ln(2)}^1 u^{-3} du = \left[-\frac{1}{2} u^{-2} \right]_{\ln(2)}^1$$

$$\text{donc } L = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{u^2} \right]_{\ln(2)}^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\ln^2(2)} \right) = \frac{1}{2 \ln^2(2)} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1 - \ln^2(2)}{2 \ln^2(2)}}$$

* Principe : on veut transformer $I = \int_a^b f(x) dx$ avec $\boxed{x = \varphi(t)}$ avec $\varphi(t)$ qui est bijective sur $[t_1, t_2]$ tel que $a = \varphi(t_1)$ et $b = \varphi(t_2)$. De plus $dx = \varphi'(t) dt$.
Alors $I = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ et on n'a que t dans l'intégrale.

* Exemple : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$

on pose $\boxed{x = m(t)}$ $\Rightarrow dx = m'(t) dt$ et $m(t)$ est bijective sur $[0; \frac{\pi}{6}]$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-m^2(t)} m'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{m'(t)} m'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} |m'(t)| m'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} m'^2(t) dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+m'(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} m'(2t) dt = \frac{1}{2} \left[t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} m(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

donc $I = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - 0 \right) + \frac{1}{4} \left(m\left(\frac{\pi}{3}\right) - m(0) \right) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}(1-0)$ donc $\boxed{I = \frac{\pi+3}{12}}$

4) Intégration des fractions rationnelles

a) Méthode : on décompose, d'abord, la fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et chaque terme de cette décomposition sera intégré séparément.

b) Exemple la fraction $F(x) = E(x) + \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{Sx+T}{x^2+px+q}$
est décomposée sur $\mathbb{R}$ (avec $p^2-4q < 0$)

$$* \int_a^b E(x) dx = [\text{polynôme}]_a^b$$

$$* \int_a^b \frac{A}{x-x_0} dx = A \int_a^b \frac{dx}{x-x_0} = A [\ln|x-x_0|]_a^b$$

$$* \int_a^b \frac{B}{(x-x_0)^2} dx = B \int_a^b \frac{dx}{(x-x_0)^2} = B \left[-\frac{1}{x-x_0} \right]_a^b$$

$$* \int_a^b \frac{Sx+T}{x^2+px+q} dx = S \int_a^b \frac{x+V}{x^2+px+q} dx = \frac{S}{2} \int_a^b \frac{2x+2V}{x^2+px+q} dx$$

$$= \frac{S}{2} \int_a^b \frac{2x+p+2V-p}{x^2+px+q} dx = \frac{S}{2} \int_a^b \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \frac{S(2V-p)}{2} \int_a^b \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{S}{2} \left[\ln|x^2+px+q| \right]_a^b + W \int_a^b \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} \text{ etc...}$$