

Correction des exercices 1, 2, 3, 4 (calcul intégral)

1

EX n°1 : 1) $I = \int_1^2 (2x + x^2) dx = \int_1^2 2x dx + \int_1^2 x^2 dx = \left[x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2$

donc $I = (2^2 - 1^2) + \frac{1}{3} [x^3]_1^2 = 4 - 1 + \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) = 3 + \frac{1}{3} (8 - 1) = 3 + \frac{7}{3}$ donc $I = \frac{16}{3}$

2) $J = \int_1^3 \frac{1+x e^x}{x} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{x e^x}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \int_1^3 \frac{dx}{x} + \int_1^3 e^x dx$

donc $J = [\ln|x|]_1^3 + [e^x]_1^3 = (\ln|3| - \ln|1|) + (e^3 - e^1) = \ln(3) - \ln(1) + e^3 - e$

or $\ln(1) = 0$ donc $J = \ln(3) + e^3 - e$

3) $K = \int_{-1}^1 e^{-t} dt$ On sait que $(e^t)' = e^t$ et $(e^{-t})' = -e^{-t}$
donc une primitive de $f(t) = e^{-t}$ est $F(t) = -e^{-t}$

alors $K = [-e^{-t}]_{-1}^1 = -[e^{-t}]_{-1}^1 = -(e^{-1} - e^1) = -\left(\frac{1}{e} - e\right) = -\left(\frac{1-e^2}{e}\right)$ donc $K = \frac{e^2-1}{e}$

4) $L = \int_0^2 |2x-1| dx$

On ne peut pas déterminer la primitive d'une expression avec $| |$
alors on va chercher à "éliminer" les $| |$.

a) Tableau de signe pour $2x-1$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2x-1$		-	0	+	
$ 2x-1 $	$-(2x-1) = -2x+1$	0	0	$2x-1$	

En effet,

si $a \in \mathbb{R}_+$, $|a| = a$

si $a \in \mathbb{R}_-$, $|a| = -a$

si $z \in \mathbb{C} (z = x + iy)$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) on peut maintenant calculer L en distinguant les intervalles $[0; \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}; 2]$

$L = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1) dx = [-x^2+x]_0^{\frac{1}{2}} + [x^2-x]_{\frac{1}{2}}^2$

$L = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (-0+0) + \left(4 - 2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 2$ donc $L = \frac{5}{2}$

EX n°2 1) $N = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x) dx = \left[\frac{1}{3} \sin(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} [\sin(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right)$

car $3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ donc $N = \frac{1}{3} (1-0)$ donc $N = \frac{1}{3}$

Exercice 2 2) $P = \int_0^{\pi} \sin(2x + \frac{\pi}{3}) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \left[\cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3}) \right] = -\frac{1}{2} \left[\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3}) \right] = 0$

donc $P = -\frac{1}{2} \left(\cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3}) \right) = -\frac{1}{2} \left(\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3}) \right)$ donc $\boxed{P=0}$

En effet, $\forall x, \cos(x+2\pi) = \cos(x)$ (périodicité du cosinus)

3) $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \cos(3x) dx$

* on doit d'abord linéariser $\cos(2x) \cos(3x)$

Pour cela, on peut utiliser les formules d'Euler (voir 1^{er} semestre) ou l'une des 3 formules de trigonométrie suivantes (à connaître):

$$\begin{aligned} \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \\ \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b) \end{aligned}$$

ici $\cos(2x) \cos(3x) = \frac{1}{2} \cos(2x+3x) + \frac{1}{2} \cos(2x-3x) = \frac{1}{2} \cos(5x) + \frac{1}{2} \cos(-x)$

mais $\cos(-x) = \cos(x)$ (fonction paire) donc $\cos(2x) \cos(3x) = \frac{1}{2} \cos(5x) + \frac{1}{2} \cos(x)$

* on peut maintenant calculer M

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos(5x) + \frac{1}{2} \cos(x) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(5x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$$

donc $M = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} \sin(5x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left[\sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10} \left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) + \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right)$

soit $M = \frac{1}{10} (1-0) + \frac{1}{2} (1-0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{5}{10} = \frac{6}{10}$ donc $\boxed{M = \frac{3}{5}}$

4) $Q = \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$

* on doit d'abord linéariser $\sin^2(x)$

on peut utiliser l'une des formules ci-dessus ou les formules de duplication

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad (\text{à connaître})$$

ici $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$ donc $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$

* on peut maintenant calculer Q

$$Q = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} [x]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi}$$

$Q = \frac{1}{2} (\pi - 0) - \frac{1}{4} (\sin(2\pi) - \sin(0)) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} (0 - 0)$ donc $\boxed{Q = \frac{\pi}{2}}$

Exo2 : 5) $R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin^3(x) dx$

* on pourrait commencer par li'ne'aiser $\cos(x) \sin^3(x)$ mais on remarque que

$$R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) u^3(x) dx \quad \text{or} \quad [u^4(x)]' = 4 u'(x) u^3(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \sin(x)$$

* on peut alors calculer R avec cette remarque

$$R = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos(x) \sin^3(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) u^3(x) dx = \frac{1}{4} [u^4(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} [\sin^4(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{et} \quad R = \frac{1}{4} (\sin^4(\frac{\pi}{2}) - \sin^4(0)) = \frac{1}{4} (1 - 0) \quad \text{donc} \quad \boxed{R = \frac{1}{4}}$$

$$6) T = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos^5(x) dx \quad (\text{question rapetue' en cours de TD})$$

* on devrait d'abord li'ne'aiser $\sin(x) \cos^5(x)$ mais on remarque que

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -u'(x) u^5(x) dx \quad \text{avec} \quad u(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad u'(x) = -\sin(x)$$

$$\text{or} \quad [u^6(x)]' = 6 \cdot u'(x) u^5(x)$$

* on peut alors calculer T avec cette remarque

$$T = -\frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6 (-\sin(x)) \cos^5(x) dx = -\frac{1}{6} [u^6(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{6} [\cos^6(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{donc} \quad T = -\frac{1}{6} (\cos^6(\frac{\pi}{4}) - \cos^6(0)) = -\frac{1}{6} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^6 - 1^6 \right) = -\frac{1}{6} \left(\frac{8}{64} - 1 \right) = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} - 1 \right)$$

$$\text{donc} \quad T = -\frac{1}{6} \left(-\frac{7}{8} \right) \quad \text{donc} \quad \boxed{T = \frac{7}{48}}$$

Exo3 1) $A = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$

on remarque que $(e^x)' = e^x$, $(e^{ax})' = a e^{ax}$ et $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$

$$\text{donc} \quad A = \frac{1}{-2} \int_0^1 -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 u'(x) e^{u(x)} dx = -\frac{1}{2} [e^{u(x)}]_0^1 = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1$$

$$\text{donc} \quad A = -\frac{1}{2} (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1-e}{e} \right) \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \frac{e-1}{2e}}$$

Remarque

l'intégrale $\int_a^b e^{-x^2} dx$ ne peut pas être calculée exactement car on ne connaît pas une primitive de $f(x) = e^{-x^2}$ représentée par une courbe de Gauss. On ne pourra avoir qu'une valeur approchée de cette intégrale !

Ex 3 2) $B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$ 4

on a donc $B = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = - \left[\ln |u(x)| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = - \left[\ln |\cos(x)| \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

donc $B = - \left(\ln |\cos(\frac{\pi}{3})| - \ln |\cos(0)| \right) = - \left(\ln |\frac{1}{2}| - \ln |1| \right) = - \left(\ln(\frac{1}{2}) - \ln(1) \right)$

donc $B = - (\ln(1) - \ln(2) - 0) = - (0 - \ln(2))$ donc $\boxed{B = \ln(2)}$

remarque 1 $\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| + C$, $C \in \mathbb{R}$ (il s'agit de toutes les primitives de $\tan(x)$)

remarque 2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx$ n'est pas une intégrale de finie mais une intégrale généralisée pour la borne $\frac{\pi}{2}$ car $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

3) $C = \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \int_1^2 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \left[\ln |u(x)| \right]_1^2 = \left[\ln |x^2-x+1| \right]_1^2$

donc $C = \ln |4-2+1| - \ln |1-1+1| = \ln |3| - \ln |1| = \ln(3) - 0$ donc $\boxed{C = \ln(3)}$

4) $D = \int_1^2 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx = - \int_1^2 \frac{-u'(x)}{u^2(x)} dx$ avec $u(x) = x^2-x+1$

or, $\left(\frac{1}{u(x)} \right)' = - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ justement !

donc une primitive de $f(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$ est $F(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$

$D = - \left[\frac{1}{x^2-x+1} \right]_1^2 = - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1} \right) = - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = - \left(-\frac{2}{3} \right)$ donc $\boxed{D = \frac{2}{3}}$

5) $E = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{3 dx}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{u'(x) dx}{2\sqrt{u(x)}}$

or $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ donc $E = \frac{2}{3} \left[\sqrt{3x+1} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (\sqrt{4} - \sqrt{1}) = \frac{2}{3} (2-1)$

donc $\boxed{E = \frac{2}{3}}$

6) $F = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = - \int_{-2}^{-1} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = - \int_{-2}^{-1} u'(x) e^{u(x)} dx$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$

or $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$ donc $F = - \left[e^{\frac{1}{x}} \right]_{-2}^{-1} = - \left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}} \right) = - \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$

donc $F = - \left(\frac{1}{e} - \frac{\sqrt{e}}{e} \right)$ donc $\boxed{F = \frac{\sqrt{e}-1}{e}}$

Exercice 4 : Utilisons une ou 2 IPP

5

$$1) I_1 = \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \int_1^e u dv = \left[uv \right]_1^e - \int_1^e v du$$

on pose $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x^2 dx \Leftrightarrow v = \frac{1}{3} x^3$

donc $I_1 = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{3} e^3 \ln(e) - \frac{1}{3} \ln(1) \right) - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx$

donc $I_1 = \frac{1}{3} e^3 - 0 - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^e = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} (e^3 - 1) = \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}$ donc $\boxed{I_1 = \frac{2e^3 + 1}{9}}$

$$2) I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} u dv = \left[uv \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} v du$$

on pose $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos(x) dx \Leftrightarrow v = \sin(x)$

donc $I_2 = \left[x \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) dx = \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 0 - \left[-\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

donc $I_2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \left[\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(0) \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$

donc $\boxed{I_2 = \frac{\pi\sqrt{3} - 3}{6}}$

$$3) I_3 = \int_1^2 \ln(x) dx = \int_1^2 u dv = \left[uv \right]_1^2 - \int_1^2 v du$$

on pose $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = dx \Leftrightarrow v = x$

donc $I_3 = \left[x \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln(2) - 1 \ln(1) - \int_1^2 dx$

donc $I_3 = 2 \ln(2) - 0 - \left[x \right]_1^2 = 2 \ln(2) - (2 - 1)$ donc $\boxed{I_3 = 2 \ln(2) - 1}$

$$4) I_4 = \int_0^{\pi} t^2 \sin(t) dt$$

* IPP n°1 on pose $u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$

$dv = \sin(t) dt \Leftrightarrow v = -\cos(t)$

donc $I_4 = \left[-t^2 \cos(t) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(t) \cdot 2t dt = -\left[t^2 \cos(t) \right]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} t \cos(t) dt$

donc $I_4 = -\left(\pi^2 \cos(\pi) - 0 \right) + 2 \int_0^{\pi} t \cos(t) dt = \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} t \cos(t) dt$

4) * IPP n°2 from $\int_0^\pi t \omega(t) dt$

on pose $u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = \omega(t) dt \Leftarrow v = \sin(t)$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \omega(t) dt &= \int_0^\pi u v du = \left[uv \right]_0^\pi - \int_0^\pi v du = \left[t \sin(t) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(t) dt \\ &= \pi \sin(\pi) - 0 - \left[-\cos(t) \right]_0^\pi = 0 + \left[\cos(t) \right]_0^\pi = \cos(\pi) - \cos(0) \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

* conclusion $J_4 = \pi^2 + 2(-2)$ donc $\boxed{J_4 = \pi^2 - 4}$

5) $J_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} \omega(t) dt$

* IPP n°1 on pose $u = e^{-t} \Rightarrow du = -e^{-t} dt$

$dv = \omega(t) dt \Leftarrow v = \sin(t)$

donc $J_5 = \left[e^{-t} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} \cos(t) dt = e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0 \sin(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} \cos(t) dt$

donc $J_5 = e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} \cos(t) dt$

* IPP n°2 on pose $u = e^{-t} \Rightarrow du = -e^{-t} dt$

$dv = \sin(t) dt \Leftarrow v = -\cos(t)$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} \cos(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u dv = \left[uv \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v du = \left[-e^{-t} \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t) (-e^{-t} dt) \\ &= -e^{-\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + e^0 \cos(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} \cos(t) dt \\ &= 1 - J_5 \quad (\text{on retombe sur } J_5 !) \end{aligned}$$

* Finalement $J_5 = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - J_5$ donc $2J_5 = 1 + e^{-\frac{\pi}{2}}$

donc $\boxed{J_5 = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}}$ (J_5 est une intégrale dite circulaire)